Olimpiada Republicană la Matematică
Prima zi, 4 martie 2023, Clasa a X–a

10.1. Fie m și n două numere întregi, astfel încât $\frac{n^3}{m+n}$ este un număr întreg. Arătați că $\frac{2023 \cdot m^4}{m+n}$ este un număr întreg.

10.2. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic, iar H un punct din interiorul triunghiului, astfel încât $AB^2 + CH^2 = BC^2 + AH^2 = AC^2 + BH^2$. Demonstrați că H este ortocentrul triunghiului ABC.

10.3. Fie expresia $E = \frac{3(x+y)(z+t)}{8} \cdot \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{zt} \right)$, unde $x, y, z, t \in [1;3]$. Determinați cea mai mare valoare și cea mai mică valoare posibile ale expresiei E.

10.4. Determinați toate valorile parametrului real a, pentru care ecuația $\sqrt{x-9} = ax + 7a - 3$ are o soluție reală unică.

Timp de lucru: 240 minute.

Rezolvarea corectă a fiecărei probleme se apreciază cu 7 puncte. **MULT SUCCES!**

Olimpiada Republicană la Matematică
Prima zi, 4 martie 2023, Clasa a X–a

10.1. Fie m și n două numere întregi, astfel încât $\frac{n^3}{m+n}$ este un număr întreg. Arătați că $\frac{2023 \cdot m^4}{m+n}$ este un număr întreg.

10.2. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic, iar H un punct din interiorul triunghiului, astfel încât $AB^2 + CH^2 = BC^2 + AH^2 = AC^2 + BH^2$. Demonstrați că H este ortocentrul triunghiului ABC.

10.3. Fie expresia $E = \frac{3(x+y)(z+t)}{8} \cdot \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{zt} \right)$, unde $x, y, z, t \in [1;3]$. Determinați cea mai mare valoare și cea mai mică valoare posibile ale expresiei E.

10.4. Determinați toate valorile parametrului real a, pentru care ecuația $\sqrt{x-9} = ax + 7a - 3$ are o soluție reală unică.

Timp de lucru: 240 minute.

Rezolvarea corectă a fiecărei probleme se apreciază cu 7 puncte. **MULT SUCCES!**