OLIMPIADA REPUBLICANĂ LA MATEMATICĂ
A doua zi, 3 martie 2024, Clasa a X–a
Soluții

10.5. Fie numerele raționale nenule a, b și c, astfel încât $a+b+c=\dfrac{1}{abc}$ și numărul $E=\left(a^2b^2+1\right)\left(b^2c^2+1\right)\left(c^2a^2+1\right)$. Arătați că numărul $\sqrt{E}$ este număr rațional.

Soluție. Notăm $\dfrac{1}{a}=x,\ \dfrac{1}{b}=y,\ \dfrac{1}{c}=z$. Atunci $x,y,z\in\mathbb{Q}^*$ și $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=xyz \Leftrightarrow xy+yz+zx=x^2y^2z^2$.

Numărul $E=\left(\dfrac{1}{x^2y^2}+1\right)\left(\dfrac{1}{y^2z^2}+1\right)\left(\dfrac{1}{z^2x^2}+1\right)=\dfrac{\left(1+x^2y^2\right)\left(1+y^2z^2\right)\left(1+z^2x^2\right)}{x^4y^4z^4}$.

$x^2+xy+yz+zx=x^2+x^2y^2z^2=x^2\left(1+y^2z^2\right)$, de unde $1+y^2z^2=\dfrac{x^2+xy+yz+zx}{x^2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1+y^2z^2=\dfrac{x(x+y)+z(y+x)}{x^2}\Leftrightarrow 1+y^2z^2=\dfrac{(x+y)(x+z)}{x^2}$ **(1)**.

În mod analog, obținem $1+z^2x^2=\dfrac{(y+z)(y+x)}{y^2}$ **(2)** și $1+x^2y^2=\dfrac{(z+x)(z+y)}{z^2}$ **(3)**.

Cu (1), (2) și (3), obținem $E=\dfrac{(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2}{x^6y^6z^6}$, de unde $\sqrt{E}=\left|\dfrac{(x+y)(y+z)(z+x)}{x^3y^3z^3}\right|$, adică $\sqrt{E}\in\mathbb{Q}$.

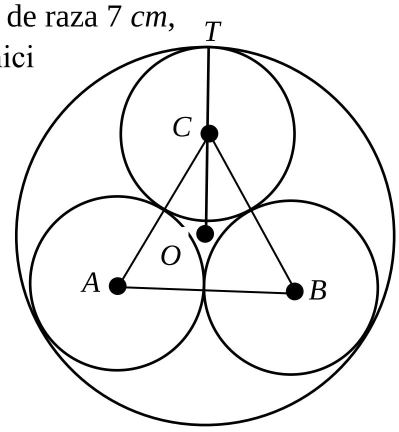
10.6. Determinați numărul maxim de bile cu raza de 3 *cm*, ce încap complet într-un cilindru circular drept cu diametrul de 14 *cm* și înălțimea de 6 *cm*.

Soluție. Înălțimea cilindrului coincide cu diametrul bilelor, deci bilele încap complet în cilindru când se ating de baza de jos a cilindrului. Ducând un plan paralel cu bazele cilindrului prin mijlocul înălțimii lui, avem în secțiune cercuri de raza 3 *cm*, secțiunea centrală a bilelor.

Deci, problema se reduce la întrebarea: Care este cel mai mare număr de cercuri cu raza de 3 *cm*, care se pot include într-un cerc cu raza 7 *cm*, fără a avea puncte interioare comune?

Evident, un cerc sau două cercuri cu raza de 3 *cm* pot fi incluse într-un cerc cu raza de 7 *cm*.

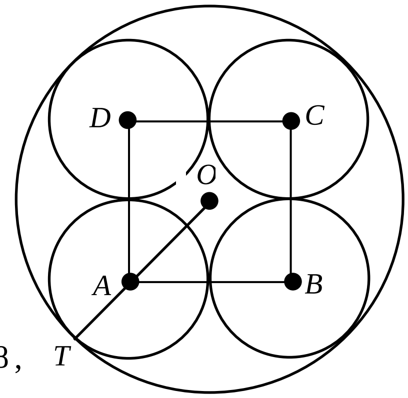
Pentru a vedea, dacă putem include trei cercuri mici în cercul mare de raza 7 *cm*, vom determina raza minimă R a unui cerc mare, când cele trei cercuri mici sunt tangente două câte două și sunt tangente la acest cerc mare.



Fie $r=3cm$ și O centrul cercului mare și R raza lui. Atunci $R=OT=OC+CT=OC+r$. Vom avea triunghiul ABC echilateral, unde punctele $A,\ B,\ C$ sunt centrele cercurilor mici. OC reprezintă raza cercului circumscris triunghiul ABC, deci $OC=\dfrac{AB}{\sqrt{3}}=\dfrac{2r}{\sqrt{3}}=\dfrac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}\ (cm)$ și $R=3+2\sqrt{3}\ cm$.

Însă raza cercului mare este de 7 *cm* și $7>3+2\sqrt{3}\Leftrightarrow 2>\sqrt{3}$, prin urmare pot fi incluse trei cercuri cu raza de 3 *cm* în cercul mare cu raza de 7 *cm*.

Acum, vom determina raza minimă a cercului mare, ca în el să poată fi incluse 4 cercuri mici. Evident, cercurile mici trebuie să fie tangente două câte două, atunci centrele lor vor fi vârfurile unui romb cu latura a. Raza cercului mare $R=\max\left\{\frac{d_1}{2}+r,\frac{d_2}{2}+r\right\}$, unde d_1 și d_2 sunt diagonalele rombului. Deci $4a^2=d_1^2+d_2^2\le 2\max\left\{d_1^2,\,d_2^2\right\}=2\left(\max\left\{d_1,d_2\right\}\right)^2\Rightarrow\max\left\{d_1,d_2\right\}\ge a\sqrt{2}$, cu egalitate când $d_1=d_2$. Dar $R=\frac{1}{2}\max\left\{d_1,d_2\right\}+r\ge\frac{1}{2}a\sqrt{2}+r$ și va fi minimă când $d_1=d_2$, prin urmare când centrele cercurilor mici formează un pătrat.



Fie $r=3cm$ și O centrul cercului mare. Atunci $R=OT=OA+AT=OA+r$. Vom avea pătratul $ABCD$, unde punctele A,B,C,D sunt centrele cercurilor mici. OA reprezintă jumătate din diagonala pătratului $ABCD$ cu latura $AB=2r=6\ cm$, deci

$OA=\frac{AB\sqrt{2}}{2}=\frac{6\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}\,(cm)$ și $R=3\sqrt{2}+3\ cm$.

Dar, raza cercului mare este de 7 *cm* și $7<3\sqrt{2}+3\Leftrightarrow 4<3\sqrt{2}\Leftrightarrow 16<18$, prin urmare nu pot fi incluse 4 cercuri cu raza de 3 *cm* în cercul mare cu raza de 7 *cm*.

Răspuns: 3.

10.7. Determinați toate funcțiile $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$, astfel încât $3f(x)-2f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=x+1$.

Soluție. Înlocuim x cu $\frac{x+1}{x-1}$, atunci proprietatea din enunț divine $3f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)-2f(x)=\frac{x+1}{x-1}+1$.

Deci, obținem sistemul $\begin{cases}3f(x)-2f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=x+1\\ 3f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)-2f(x)=\frac{x+1}{x-1}+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+f(x)=\frac{x+1}{x-1}+x+2\\ 3f(x)-2f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=x+1\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+2f(x)=\frac{2x+2}{x-1}+2x+4\\ 2f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=3f(x)-x-1\end{cases}$. De unde $3f(x)-x-1+2f(x)=\frac{2x+2}{x-1}+2x+4$, prin urmare $f(x)=\frac{3x^2+4x-3}{5x-5}$. Rămâne de verificat, dacă $f(x)=\frac{3x^2+4x-3}{5x-5}$ satisface relația din enunț:

$$3f(x)-2f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=3\cdot\frac{3x^2+4x-3}{5(x-1)}-2\cdot\frac{3\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2+4\left(\frac{x+1}{x-1}\right)-3}{5\left(\frac{x+1}{x-1}-1\right)}=\frac{9x^2+12x-9}{5(x-1)}-$$

$$-2\cdot\frac{3(x+1)^2+4(x+1)(x-1)-3(x-1)^2}{(x-1)^2\cdot 5\left(\frac{x+1-x+1}{x-1}\right)}=\frac{9x^2+12x-9}{5(x-1)}-2\cdot\frac{3\left(x^2+2x+1\right)+4\left(x^2-1\right)-3\left(x^2-2x+1\right)}{(x-1)\cdot 5\cdot 2}=$$

$= \dfrac{5x^2-5}{5(x-1)} = \dfrac{5(x-1)(x+1)}{5(x-1)} = x+1$. Deci unica funcției care verifică relația din enunț este $f(x) = \dfrac{3x^2+4x-3}{5x-5}$.

Răspuns: $f(x) = \dfrac{3x^2+4x-3}{5x-5}$.

10.8. Rezolvați în numere reale sistemul de ecuații

$$\begin{cases} \log_{x^2+1} 2 + \log_2\left(y^2+1\right) = 2 \\ x^4 + 2xy + 1 = 0 \end{cases}.$$

Soluție. DVA: $x \neq 0$. Dacă $y = 0$, atunci ecuația a doua devine $x^4 + 1 = 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$. Deci și $y \neq 0$.

Ambii termeni din partea dreaptă a primei ecuații sunt pozitivi, deoarece bazele și expresiile de sub logaritmi sunt mai mari decât unu. Conform inegalității mediilor (aritmetice și geometrice)

$$2 = \log_{x^2+1} 2 + \log_2\left(y^2+1\right) \geq 2\sqrt{\log_{x^2+1} 2 \cdot \log_2\left(y^2+1\right)} = 2\sqrt{\frac{\log_2\left(y^2+1\right)}{\log_2\left(x^2+1\right)}} = 2\sqrt{\log_{x^2+1}\left(y^2+1\right)}.$$

Deci $\sqrt{\log_{x^2+1}\left(y^2+1\right)} \leq 1 \Leftrightarrow \log_{x^2+1}\left(y^2+1\right) \leq 1$, deoarece $\log_{x^2+1}\left(y^2+1\right) > 0$. Prin urmare, $x^2+1 \geq y^2+1 \Leftrightarrow (x-y)(x+y) \geq 0$ **(1)**.

Din ecuația a doua urmează $x^4 + 2xy + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 + 2x^2 + 1 + 2xy - 2x^2 = 0 \\ x^4 - 2x^2 + 1 + 2xy + 2x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^2+1\right)^2 + 2x(y-x) = 0 \\ \left(x^2-1\right)^2 + 2x(y+x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(y-x) \leq 0 \\ x(y+x) \leq 0 \end{cases}.$$

Deoarece $x \neq 0$, conchidem că $(y-x)(y+x) \geq 0$, deci $(x-y)(x+y) \leq 0$ **(2)**.

Din (1) și (2), urmează $(x-y)(x+y) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-y=0 \\ x+y=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=x \\ y=-x \end{array}\right.$, dar din ecuația a doua a sistemului $0 < x^4 + 1 = -2xy \Rightarrow xy < 0$, prin urmare $y = -x$.

Înlocuind în ecuația a doua $y = -x$, avem $x^4 - 2x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2-1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$, și obținem soluțiile $(1,-1)$ și $(-1,1)$. Se verifică ușor, că ele satisfac ecuațiile sistemului.

Răspuns: $S = \{(1,-1), (-1,1)\}$.