Olimpiada Republicană la Matematică
A doua zi, 5 martie 2023, Clasa X–a
Soluții

10.5. Fie $P(X)$ un polinom cu coeficienți reali, astfel încât $x \cdot P(x+2022)-(x+2023)\cdot P(x)=2022\cdot x-2023$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Aflați restul împărțirii polinomului $P(X)$ la polinomul $Q(X)=X^2+X$.

Rezolvare. Presupunem că polinomul $P(X)$ verifică relația din enunț. Deoarece această egalitate este adevărată pentru orice număr real x, atunci pentru $x=0$, obținem $-2023\cdot P(0)=-2023 \Leftrightarrow P(0)=1$.

Pentru $x=-2023$ obținem $-2023\cdot P(-1)=-2023^2 \Leftrightarrow P(-1)=2023$.

Restul împărțirii polinomului $P(X)$ la polinomul $Q(X)$ va fi un polinom de grad mai mic decât 2, adică va avea forma $R(X)=aX+b$.

Are loc egalitatea $P(x)=(x^2+x)\cdot C(x)+ax+b$, pentru orice număr real *x*, în particular pentru $x=0$ și pentru $x=-1$.

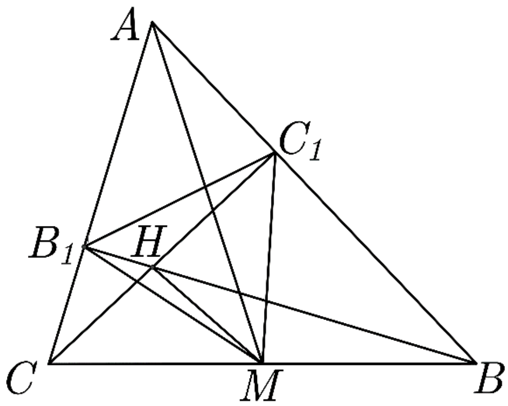
Obținem sistemul $\begin{cases} P(0)=0\cdot C(0)+a\cdot 0+b \\ P(-1)=0\cdot C(-1)-a+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ 2023=-a+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2022 \\ b=1 \end{cases}$.

Polinoame care satisfac relația din enunț există, de exemplu $P(X)=-2022\cdot X+1$.

Răspuns: $-2022\cdot X+1$

10.6. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic, în care $m(\angle BAC)=60^\circ$, iar $BC=a$. Fie M mijlocul laturii BC, iar $[BB_1]$ și $[CC_1]$ două înălțimi ale triunghiului. Calculați suma distanțelor de la ortocentrul triunghiului ABC până la laturile triunghiului MB_1C_1.

Rezolvare.



1. În triunghiul dreptunghic BCB_1 segmentul MB_1 este mediană, atunci $MB_1=\frac{BC}{2}=\frac{a}{2}$. Idem $MC_1=\frac{a}{2}$.

2. Considerăm triunghiurile AB_1C_1 și ABC. Vom arăta că ele sunt asemenea.

Aceste triunghiuri au unghiul A comun.

Vom arăta că laturile care formează unghiul A sunt proporționale.

$\frac{AC_1}{AC}=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}=\frac{AB_1}{AB}$, deci $\triangle AB_1C_1\sim\triangle ABC$, atunci $\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{AB_1}{AB}=\frac{1}{2}\Rightarrow B_1C_1=\frac{a}{2}$. Observăm că triunghiul MB_1C_1 este echilateral cu latura de lungimea $\frac{a}{2}$.

3. Calculăm aria triunghiului MB_1C_1:

$\mathcal{A}=\left(\frac{a}{2}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{a^2\sqrt{3}}{16}$. Mai putem scrie

$$\mathcal{A}=\mathcal{A}_{MHB_1}+\mathcal{A}_{MHC_1}+\mathcal{A}_{B_1HC_1}=\frac{a}{4}\cdot d(H;MB_1)+\frac{a}{4}\cdot d(H;MC_1)+\frac{a}{4}\cdot d(H;B_1C_1)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{a^2\sqrt{3}}{16}=\frac{a}{4}\cdot\left[d(H;MB_1)+d(H;MC_1)+d(H;B_1C_1)\right]\Leftrightarrow d(H;MB_1)+d(H;MC_1)+d(H;B_1C_1)=\frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Răspuns: $\frac{a\sqrt{3}}{4}$

10.7. Fie numerele $a,b,c\in\mathbb{N}^*$, astfel încât $\dfrac{a\sqrt{2023}+b}{a+c\sqrt{2023}}$ este un număr rațional. Arătați că $\left(a^2+b^2+c^2\right)\vdots\left(a+b+c\right)$.

Rezolvare. Fie $\dfrac{a\sqrt{2023}+b}{a+c\sqrt{2023}}\in\mathbb{Q}$. Atunci $\dfrac{a\sqrt{2023}+b}{a+c\sqrt{2023}}=\dfrac{m}{n}$, $m,n\in\mathbb{N}^*$. Obținem relația $na\sqrt{2023}+nb=ma+mc\sqrt{2023}\Leftrightarrow\left(na-mc\right)\sqrt{2023}=ma-nb$, dar $a,b,c,m,n\in\mathbb{N}^*$ și $\sqrt{2023}=17\sqrt{7}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, prin urmare $na-mc=0$ și $ma-nb=0$. De unde $a=\dfrac{m}{n}c$ și $b=\dfrac{m}{n}a=\dfrac{m^2}{n^2}c$.

Deci $a+b+c=\dfrac{m}{n}c+\dfrac{m^2}{n^2}c+c=c\left(\dfrac{m^2}{n^2}+\dfrac{m}{n}+1\right)$.

Avem relația $k^4+k^2+1=\left(k^2+k+1\right)\left(k^2-k+1\right)$, prin urmare

$$a^2+b^2+c^2=\frac{m^2}{n^2}c^2+\frac{m^4}{n^4}c^2+c^2=c^2\left(\frac{m^4}{n^4}+\frac{m^2}{n^2}+1\right)=c^2\left(\frac{m^2}{n^2}+\frac{m}{n}+1\right)\left(\frac{m^2}{n^2}-\frac{m}{n}+1\right)=$$

$$=c\left(\frac{m^2}{n^2}+\frac{m}{n}+1\right)\left(\frac{m^2}{n^2}c-\frac{m}{n}c+c\right)=\left(a+b+c\right)\left(b-a+c\right).$$ De unde $\left(a^2+b^2+c^2\right)\vdots\left(a+b+c\right)$.

10.8. Determinați toate valorile parametrului real a, pentru care ecuația $2\cdot\left|2\cdot|x|-a^2\right|=x-a$ are exact trei soluții reale.

Rezolvare. Dacă vom considera $a=0$, atunci obținem ecuația $4\cdot|x|=x\Leftrightarrow x=0$.

Pentru $a=0$ ecuația are doar o soluție reală, deci $a\neq 0$.

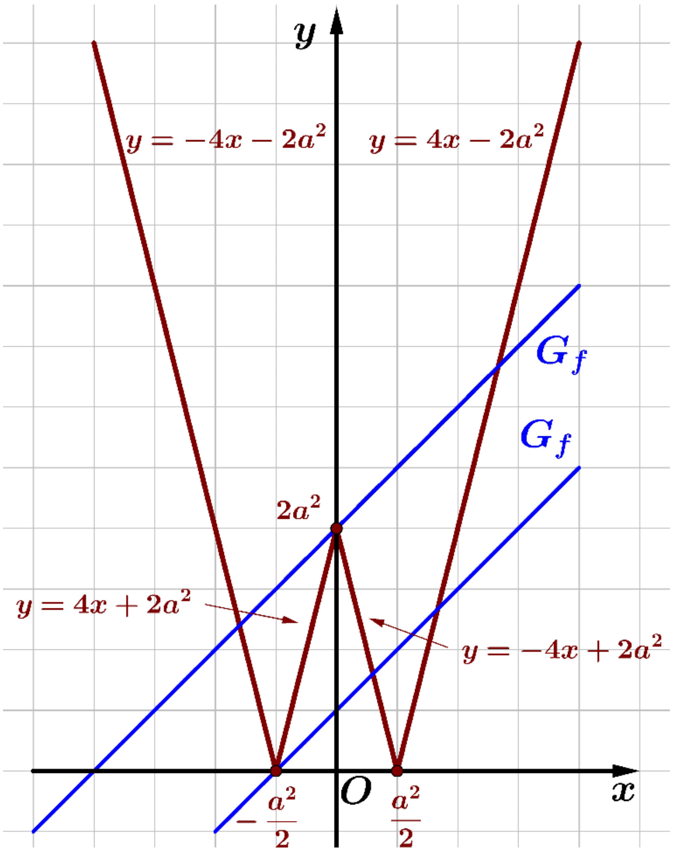
Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x-a$. Pentru orice valoare fixată a parametrului a graficul funcției f este o dreaptă cu panta egală cu 1, care este paralelă cu dreapta suport a bisectoarelor cadranelor I și III. Graficul funcției f intersectează axa absciselor în punctul $(a;0)$.

Considerăm funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=2\cdot\left|2\cdot|x|-a^2\right|$. Observăm că funcția g este pară. Vom trasa graficul funcției g pentru $x\geq 0$, apoi, printr-o simetrie în raport cu axa Oy, vom trasa graficul funcției g.

Pentru $x\geq 0$, obținem $g(x)=2\cdot\left|2x-a^2\right|=\begin{cases}-4x+2a^2, \text{ dacă } 0\leq x<\dfrac{a^2}{2}\\ 4x-2a^2, \text{ dacă } x\geq\dfrac{a^2}{2}\end{cases}.$

Atunci putem scrie:

$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=\begin{cases}-4x-2a^2,\ \textit{dacă}\ \ x<-\dfrac{a^2}{2}\\ 4x+2a^2,\ \textit{dacă}\ -\dfrac{a^2}{2}\leq x<0\\ -4x+2a^2,\ \textit{dacă}\ \ 0\leq x<\dfrac{a^2}{2}\\ 4x-2a^2,\ \textit{dacă}\ \ x\geq\dfrac{a^2}{2}\end{cases}.$$



Observăm că graficul funcției g este reuniunea a două semidrepte și a două segmente. Dreptele suport ale acestora au pantele -4 sau 4.

Ecuația inițială va avea trei soluții reale distincte dacă și numai dacă graficele funcțiilor f și g vor avea trei puncte comune distincte. Aceasta va avea loc doar dacă graficul funcției f va trece prin punctul $\left(-\dfrac{a^2}{2};0\right)$ sau prin punctul $(0;g(0))$, adică prin punctul $(0;2a^2)$.

Prin urmare, rezolvăm totalitatea:

$$\left[\begin{array}{l} f\left(-\dfrac{a^2}{2}\right)=0\\ f(0)=2a^2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-\dfrac{a^2}{2}-a=0\\ -a=2a^2\end{array}\right.\overset{a\neq 0}{\Leftrightarrow}\left[\begin{array}{l}a=-2\\ a=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right..$$

Răspuns: $a\in\left\{-2;-\dfrac{1}{2}\right\}$.