OLIMPIADA REPUBLICANĂ LA MATEMATICĂ
Prima zi, 2 martie 2024, Clasa a X–a
Soluții

10.1. Determinați toate numerele întregi n, pentru care numărul $\sqrt{n^4+17n^2+90}$ este număr natural.

Soluție. Fie $\sqrt{n^4+17n^2+90}=k,\ k\in\mathbb{N}^*$. Atunci $n^4+17n^2+90=k^2$, urmează $4n^4+68n^2+360=4k^2$, de unde $4k^2-\left(2n^2+17\right)^2=71 \Leftrightarrow (2k)^2-\left(2n^2+17\right)^2=71 \Leftrightarrow \left(2k+2n^2+17\right)\left(2k-2n^2-17\right)=71$.

Numărul 71 este prim, $2k+2n^2+17$ este natural și $2k+2n^2+17>2k-2n^2-17$, deci obținem $\begin{cases}2k+2n^2+17=71\\2k-2n^2-17=1\end{cases}$, de unde $4n^2+34=70 \Leftrightarrow n^2=9 \Leftrightarrow n=\pm 3$.

Pentru $n=\pm 3$, se verifică ușor condiția din enunț.

Răspuns: $n\in\{-3,3\}$.

10.2. Fie numerele reale a, b și c, astfel încât $1<a<b<c$ sau $0<c<b<a<1$. Arătați că

$$\log_a b+\log_b c+\log_c a<\log_b a+\log_c b+\log_a c.$$

Soluție. Notăm $\log_a b=x$, $\log_b c=y$ și $\log_c a=z$. Atunci pentru ambele cazuri $1<a<b<c$ sau $0<c<b<a<1$, avem $x>1$, $y>1$, $0<z<1$ și $xyz=1$.

Inegalitatea din enunț va avea forma

$$x+y+z<\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \Leftrightarrow x+y+z<\frac{yz+xz+xy}{xyz} \Leftrightarrow x+y+z<xy+yz+zx \quad \textbf{(1)}.$$

Vom demonstra (1):

$$xy+yz+zx>x+y+z \Leftrightarrow xy+z(x+y)>x+y+z \Leftrightarrow xy+\frac{x+y}{xy}>x+y+\frac{1}{xy} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (xy)^2+(x+y)>(x+y)xy+1 \Leftrightarrow (xy)^2-1>(x+y)xy-(x+y) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (xy-1)(xy+1)-(x+y)(xy-1)>0 \Leftrightarrow (xy-1)(xy+1-x-y)>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (xy-1)\big(x(y-1)-(y-1)\big)>0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{z}-1\right)(x-1)(y-1)>0 \Leftrightarrow$$

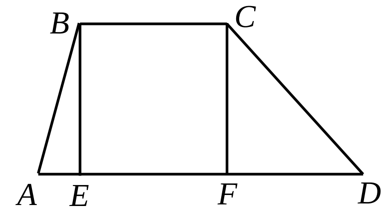
$\Leftrightarrow (1-z)(x-1)(y-1)>0$, ceea ce este adevărat.

10.3. În trapezul $ABCD$ (cu $AD \parallel BC$), avem $AB=17\ cm$, $BC=28\ cm$, $CD=25\ cm$ și $AD=40\ cm$. Aflați raza cercului înscris în triunghiul ABC.

Soluție. Fie punctele E și F proiecțiile punctelor B și C pe AD, respectiv. În dependență de poziționarea punctelor A și D față de punctele E și F, vom avea de cercetat următoarele cazuri.

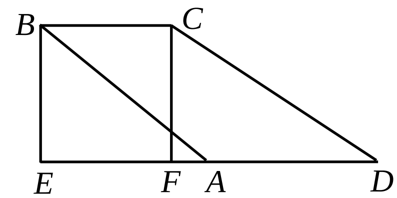
Evident, A și D nu se pot afla pe $[EF]$ concomitent, astfel $AD\le BC$, contradicție.

1) Punctul A se află în stânga lui E (sau poate coincide cu E) și D în dreapta lui F.



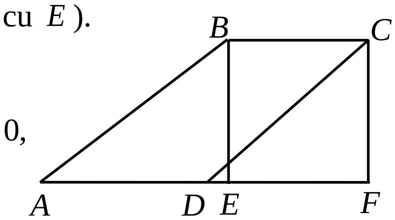
Notăm $AE = x,\ x \geq 0$. $AE + DF = AD - BC = 12\,(cm)$, deci $DF = 12 - x$. Din triunghiurile dreptunghice ABE și DCF, conform teoremei Pitagora, obținem $BE^2 = AB^2 - AE^2$ și $CF^2 = CD^2 - DF^2$ respectiv, de unde $17^2 - x^2 = 25^2 - (12 - x)^2 \Leftrightarrow x = -8$, contradicție.

2) Ambele puncte A și D se află în dreapta lui F (sau A poate coincide cu F).



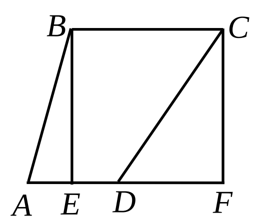
Notăm $AF = x,\ x \geq 0$. Atunci $DF = AD + AF = 40 + x$, și conform Teoremei Pitagora în $\triangle CFD$, avem $CF^2 = CD^2 - DF^2 = 25^2 - \left(40 + x\right)^2 < 0,$ contradicție.

3) Ambele puncte A și D se află în stânga lui E (sau D poate coincide cu E).



Notăm $DE = x,\ x \geq 0$. Atunci $AE = AD + DE = 40 + x$, și conform Teoremei Pitagora în $\triangle ABE$, avem $BE^2 = AB^2 - AE^2 = 17^2 - \left(40 + x\right)^2 < 0,$ contradicție. (Sau: pentru ca $AD > BC$, trebuie $AB > CD$, contradicție.)

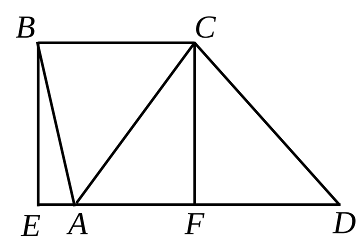
4) Punctul D se află pe $\left[EF\right]$ (sau D poate coincide cu E), iar A se află în stânga lui E.



Imposibil, deoarece $AD \parallel BC$ și $AD > BC$, și se obține $AB > CD$.

Sau, notăm $DE = x,\ x \geq 0$, atunci $AE = AD - DE = 40 - x$ și $DF = EF - DE = BC - DE = 28 - x$. Conform Teoremei Pitagora în $\triangle AEB$ și $\triangle DFC$, obținem $BE^2 = AB^2 - AE^2$ și $CF^2 = CD^2 - DF^2$ respectiv, de unde $17^2 - \left(40 - x\right)^2 = 25^2 - \left(28 - x\right)^2 \Leftrightarrow x = 48$, dar atunci $ED > BC$, contradicție.

5) Punctul A se află pe $\left[EF\right]$ (sau A poate coincide cu E), iar D se află în dreapta lui F.



Notăm $AE = x,\ x \geq 0$. $DF - AE = AD - BC = 12\,(cm)$, deci $DF = 12 + x$. Din triunghiurile dreptunghice ABE și DCF conform teoremei Pitagora, obținem $BE^2 = AB^2 - AE^2$ și $CF^2 = CD^2 - DF^2$ respectiv, de unde $17^2 - x^2 = 25^2 - (12 + x)^2 \Leftrightarrow x = 8$.

Adică $AE = 8\ cm$, $DF = 20\ cm$, $AF = 20\ cm$ și $CF = BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = 15\,(cm)$.

Triunghiurile dreptunghice ACF și DCF sunt congruente conform criteriului CC, deci $AC = DC = 25\,cm$.

Înălțimea din A dusă pe BC în $\triangle ABC$ coincide cu BE, deci aria

$$A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BE \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 28 = 210\,(cm^2)$$ și raza cercului înscris în $\triangle ABC$

$$r = \frac{2A}{a + b + c} = \frac{2 \cdot 210}{17 + 28 + 25} = 6\ (cm).$$

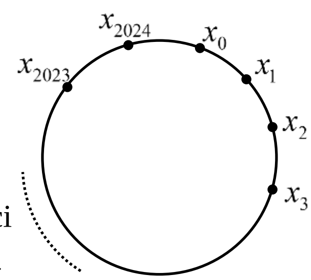
Răspuns: 6 *cm*.

10.4. Rezolvați în numere reale sistemul de ecuații

$$\begin{cases} x_0^3 = x_1 + 2x_2^3 \\ x_1^3 = x_2 + 2x_3^3 \\ x_2^3 = x_3 + 2x_4^3 \\ \quad\quad ... \\ x_{2022}^3 = x_{2023} + 2x_{2024}^3 \\ x_{2023}^3 = x_{2024} + 2x_0^3 \\ x_{2024}^3 = x_0 + 2x_1^3 \end{cases}.$$

Soluție. Adunând parte cu parte, obținem $x_0^3 + x_1^3 + ... + x_{2024}^3 = x_0 + x_1 + ... + x_{2024} + 2x_0^3 + 2x_1^3 + ... + 2x_{2024}^3$, adică $\left(x_0 + x_1 + ... + x_{2024}\right) + \left(x_0^3 + x_1^3 + ... + x_{2024}^3\right) = 0$ (**1**).

Plasăm toate numerele $x_0, x_1, x_2, ..., x_{2024}$ consecutiv (după indici) pe un cerc, ca în figură. Fiecare ecuație din sistem reprezintă o relație pentru oricare trei numere vecine consecutive pe cerc x_{i-1}, x_i, x_{i+1} (considerăm indicii în ciclu, adică $x_{2025} = x_0$).



Studiem 3 cazuri posibile:

1) Există două numere vecine egale cu zero, adică $x_i = 0$ și $x_{i+1} = 0$, atunci din relația $x_{i-1}^3 = x_i + 2x_{i+1}^3$, urmează $x_{i-1} = 0,$ și în așa mod toți $x_i = 0,\ i = \overline{0, 2024}$.

2) Există un număr egal cu zero, iar vecini lui sunt nenuli, adică $x_i = 0$ și $x_{i-1},\ x_{i+1} \neq 0$. Atunci din relația $x_{i-1}^3 = x_i + 2x_{i+1}^3 \Leftrightarrow x_{i-1}^3 = 2x_{i+1}^3$, avem că x_{i-1} și x_{i+1} sunt de același semn. Din $x_{i-2}^3 = x_{i-1} + 2x_i^3 \Leftrightarrow x_{i-2}^3 = x_{i-1}$, deci x_{i-2} și x_{i-1} sunt de același semn. Din $x_{i-3}^3 = x_{i-2} + 2x_{i-1}^3$, deoarece x_{i-2} și x_{i-1} sunt de același semn, urmează că x_{i-3} are semnul ca și x_{i-2} și x_{i-1}, adică x_{i-3}, x_{i-2} și x_{i-1} sunt de același semn. Urmând acest procedeu, conchidem că toate numerele (ele merg pe cerc) cu excepția lui x_i sunt de același semn, inclusiv x_{i+2}. Însă din relația $x_i^3 = x_{i+1} + 2x_{i+2}^3 \Leftrightarrow x_{i+1} = -2x_{i+2}^3$, urmează că x_{i+1} și x_{i+2} sunt de semne opuse, contradicție.

3) Toate numerele sunt nenule, adică toți $x_i \neq 0,\ i = \overline{0, 2024}$.

Dacă toate numerele sunt de un semn (pozitive sau negative), atunci și expresiile $x_0 + x_1 + ... + x_{2024}$ și $x_0^3 + x_1^3 + ... + x_{2024}^3$ sunt de același semn, contradicție cu (1).

Dacă orice două numere vecine au semne opuse, atunci $x_0, x_2, x_4, ..., x_{2024}$ sunt toate de același semn, contradicție, fiindcă x_0 și x_{2024} sunt vecine.

Deci există trei numere vecine, astfel încât $x_{i-1} < 0,\ x_i > 0,\ x_{i+1} > 0$ sau $x_{i-1} > 0,\ x_i < 0,\ x_{i+1} < 0$.

Dacă $x_{i-1} < 0,\ x_i > 0,\ x_{i+1} > 0$, atunci $0 > x_{i-1}^3 = x_i + x_{i+1}^3 > 0$, contradicție.

Dacă $x_{i-1} > 0,\ x_i < 0,\ x_{i+1} < 0$, atunci $0 < x_{i-1}^3 = x_i + x_{i+1}^3 < 0$, contradicție

Prin urmare, unica soluție este $\left(x_0, x_1, x_2, ..., x_{2024}\right) = \left(0, 0, 0, ..., 0\right)$.

Răspuns: $S = \left\{\left(0, 0, 0, ..., 0\right)\right\}$.