Olimpiada Republicană la Matematică
Prima zi, 4 martie 2023, Clasa X–a

Soluţii

10.1. Fie m și n două numere întregi, astfel încât $\frac{n^3}{m+n}$ este un număr întreg. Arătați că $\frac{2023\cdot m^4}{m+n}$ este un număr întreg.

Rezolvare. Considerăm numărul $\frac{m^3}{m+n}$.

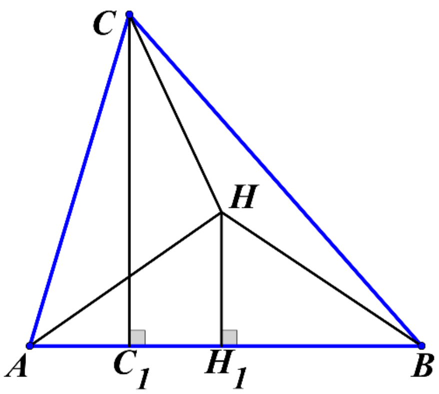
Calculăm suma $\frac{m^3}{m+n}+\frac{n^3}{m+n}=\frac{(m+n)(m^2-mn+n^2)}{m+n}=m^2-mn+n^2.$

Observăm că $m^2-mn+n^2\in\mathbb{Z}$, știm că $\frac{n^3}{m+n}\in\mathbb{Z}$, atunci $\frac{m^3}{m+n}\in\mathbb{Z}$.

$\frac{2023\cdot m^4}{m+n}=2023\cdot m\cdot\frac{m^3}{m+n}\in\mathbb{Z}.$

10.2. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic, iar H un punct din interiorul triunghiului, astfel încât $AB^2+CH^2=BC^2+AH^2=AC^2+BH^2$. Demonstrați că H este ortocentrul triunghiului *ABC*.

Rezolvare.



1. Fie $CC_1\perp AB, C_1\in AB$ și $HH_1\perp AB, H_1\in AB$.

2. $AC^2-AC_1^2=BC^2-BC_1^2, \quad (1),$

$AH^2-AH_1^2=BH^2-BH_1^2. \quad (2)$

3. Din ipoteză obținem $AC^2-BC^2=AH^2-BH^2$, din relația (1) obținem $AC^2-BC^2=AC_1^2-BC_1^2$, iar din relația (2) obținem $AH^2-BH^2=AH_1^2-BH_1^2$, atunci

$AC_1^2-BC_1^2=AH_1^2-BH_1^2, \quad (3)$

4. Relația (3) este echivalentă cu

$AC_1^2-(AB-AC_1)^2=AH_1^2-(AB-AH_1)^2\Leftrightarrow AC_1=AH_1\Rightarrow H\in CC_1$.

5. Analog se arată că H aparține și celorlalte înălțimi, adică H coincide cu ortocentrul triunghiului *ABC*.

10.3. Fie expresia $E=\frac{3(x+y)(z+t)}{8}\cdot\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{zt}\right)$, unde $x,y,z,t\in[1;3]$. Determinați cea mai mare valoare și cea mai mică valoare posibile ale expresiei E.

Rezolvare. Expresia $\frac{8E}{3}=(x+y)(z+t)\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{zt}\right)=\frac{(xz+yt+yz+xt)(zt+xy)}{xyzt}=$

$$=\frac{xz^2t+x^2yz+yzt^2+xy^2t+yz^2t+xy^2z+xzt^2+x^2yt}{xyzt}=\frac{z}{y}+\frac{x}{t}+\frac{t}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{y}{t}+\frac{t}{y}+\frac{x}{z}=$$

$$=\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right)+\left(\frac{y}{t}+\frac{t}{y}\right)+\left(\frac{t}{x}+\frac{x}{t}\right).$$

Știm că $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2, \forall a,b>0$, cu egalitate când $a=b$. Deoarece $x,y,z,t\in[1;3]$, adică sunt pozitive, urmează $\frac{8E}{3}\geq 4\cdot 2=8$, adică $E\geq 3$. Egalitatea are loc când $x=y=z=t$.

Fie $a,b\in[1;3]$. Deoarece $a\leq 3$ (1) și $b\geq 1\Leftrightarrow -3b\leq -3$ (2), adunând (1) cu (2), găsim relația $a-3b\leq 0$ (3). Mai mult, avem $a\geq 1\Leftrightarrow 3a\geq 3$ (4) și $b\leq 3\Leftrightarrow -b\geq -3$ (5), adunând (4) cu (5), obținem $3a-b\geq 0$ (6). Din relațiile (3) și (6), urmează $(a-3b)(3a-b)\leq 0$. Dar acest lucru este echivalent cu $3a^2-ab-9ba+3b^2\leq 0\Leftrightarrow 3\left(a^2+b^2\right)\leq 10ab \overset{ab>0}{\Longleftrightarrow} \frac{a^2+b^2}{ab}\leq\frac{10}{3}\Leftrightarrow\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\leq\frac{10}{3}$, cu egalitate când $a=1,\ b=3$ sau $a=3,\ b=1$. Prin urmare, $\frac{8E}{3}\leq 4\cdot\frac{10}{3}=\frac{40}{3}$, adică $E\leq 5$. Egalitatea are loc, de exemplu, pentru $x=y=1,\ z=t=3$.

Deci avem $\max_{[1;3]}E=5$ și $\min_{[1;3]}E=3$.

10.4. Determinați toate valorile parametrului real a, pentru care ecuația $\sqrt{x-9}=ax+7a-3$ are o soluție reală unică.

Rezolvare. $\sqrt{x-9}=ax+7a-3\Leftrightarrow\sqrt{x-9}=a\left(\sqrt{x-9}\right)^2+16a-3\Leftrightarrow a\left(\sqrt{x-9}\right)^2-\sqrt{x-9}+16a-3=0$.

1. Dacă $a=0$, obținem $\sqrt{x-9}=-3\Leftrightarrow x\in\varnothing$.

2. Fie $a\in\mathbb{R}^*$. Notăm $\sqrt{x-9}=t,\ t\geq 0$. Obținem ecuația $a\cdot t^2-t+16a-3=0\Leftrightarrow t^2-\frac{1}{a}\cdot t+16-\frac{3}{a}=0$ (*)

Calculăm $\Delta(a)=\frac{1}{a^2}-64+\frac{12}{a}=\frac{12a-64a^2+1}{a^2}=\frac{(16a+1)(1-4a)}{a^2}$.

2.1. Fie $a=\frac{1}{4}$, atunci obținem ecuația $t^2-4t+4=0\Leftrightarrow t=2\geq 0\Rightarrow x=13$ este unica soluție.

2.2. Fie $a=-\frac{1}{16}$, atunci obținem ecuația $t^2+16t+64=0\Leftrightarrow t=-8<0\Rightarrow x\in\varnothing$.

2.3. Fie $\Delta(a)>0\Leftrightarrow a\in\left(-\frac{1}{16};\frac{1}{4}\right)\setminus\{0\}$, atunci ecuația (*) are două soluții reale distincte. Conform ipotezei, doar una dintre aceste soluții trebuie să fie mai mare sau egal cu 0.

Dacă vom presupune că una dintre soluțiile ecuației (*) este 0, atunci obținem $a=\frac{3}{16}$, deci $t^2-\frac{16}{3}\cdot t=0\Leftrightarrow t\in\left\{0;\frac{16}{3}\right\}$. Ecuația dată are două soluții reale.

Fie $a \in \left(-\frac{1}{16}; \frac{1}{4}\right) \setminus \left\{0; \frac{3}{16}\right\}$. Condiția problemei va fi verificată dacă și numai dacă $16 - \frac{3}{a} < 0 \Leftrightarrow a \in \left(0; \frac{3}{16}\right)$.

Răspuns: $a \in \left(0; \frac{3}{16}\right) \cup \left\{\frac{1}{4}\right\}$.