РЕСПУБЛИКАНСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
Второй день, 5 марта 2023 г., X класс
СХЕМА ОЦЕНИВАНИЯ

Примечание: Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.

10.5. Дан многочлен с действительными коэффициентами $P(X)$ такой, что $x \cdot P(x+2022)-(x+2023) \cdot P(x)=2022 \cdot x-2023$, для любого $x \in \mathbb{R}$. Найдите остаток от деления многочлена $P(X)$ на многочлен $Q(X)=X^2+X$.

Этапы решения со схемой распределения баллов

Шаг	**Этапы решения**	**Количество баллов**
1.	Получение $P(0)=1$.	1б.
2.	Получение $P(-1)=2023$.	1б.
3.	Делается вывод, что остаток от деления $P(X)$ на $Q(X)$ имеет вид $R(X)=aX+b$.	1б.
4.	Получение $P(x)=(x^2+x) \cdot C(x)+ax+b \ \ (*)$.	1б.
5.	Получение системы $\begin{cases} P(0)=0 \cdot C(0)+a \cdot 0+b \\ P(-1)=0 \cdot C(-1)-a+b \end{cases}$.	1б.
6.	Получение $a=-2022$, $b=1$ и остаток $R(X)=-2022X+1$.	1б.
7.	Показывается, что существует многочлен $P(X)$ выполняющий соотношение из условии задачи.	1б.
	Общее количество баллов	**7 баллов**

10.6. Дан остроугольный треугольник ABC в котором $m(\angle BAC)=60^\circ$ и $BC=a$. Точка M – середина стороны BC, а $[BB_1]$ и $[CC_1]$ – высоты треугольника. Найдите сумму расстояний от ортоцентра треугольника ABC до сторон треугольника MB_1C_1.

Этапы решения со схемой распределения баллов

Шаг	**Этапы решения**	**Количество баллов**
1.	Получение $MB_1=\frac{BC}{2}=\frac{a}{2}$.	1б.
2.	Получение $MC_1=\frac{a}{2}$.	1б.
3.	Получение $\triangle AB_1C_1 \sim \triangle ABC$.	1б.
4.	Получение $B_1C_1=\frac{a}{2}$ и вывод, что треугольник MB_1C_1 равносторонний.	1б.
5.	Вычисление $\mathcal{A}(MB_1C_1)=\frac{a^2\sqrt{3}}{16}$.	1б.
6.	Получение $\mathcal{A}(MB_1C_1)=\frac{a}{4} \cdot d(H;MB_1)+\frac{a}{4} \cdot d(H;MC_1)+\frac{a}{4} \cdot d(H;B_1C_1)$.	1б.
7.	Получение $d(H;MB_1)+d(H;MC_1)+d(H;B_1C_1)=\frac{a\sqrt{3}}{4}$.	1б.
	Общее количество баллов	**7 баллов**

10.7. Даны числа $a,b,c\in\mathbb{N}^*$ такие, что $\frac{a\sqrt{2023}+b}{a+c\sqrt{2023}}$ – рациональное число. Покажите, что $\left(a^2+b^2+c^2\right)\vdots(a+b+c)$.

Этапы решения со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Делается вывод, что $\frac{a\sqrt{2023}+b}{a+c\sqrt{2023}}=\frac{m}{n}$, $m,n\in\mathbb{N}^*$.	1б.
2.	Получение $(na-mc)\sqrt{2023}=ma-nb$.	1б.
3.	Делается вывод, что $na-mc=0$ и $ma-nb=0$.	1б.
4.	Получение $a+b+c=c\left(\frac{m^2}{n^2}+\frac{m}{n}+1\right)$.	1б.
5.	Получение $a^2+b^2+c^2=c^2\left(\frac{m^2}{n^2}+\frac{m}{n}+1\right)\left(\frac{m^2}{n^2}-\frac{m}{n}+1\right)$.	1б.
6.	Получение $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)(b-a+c)$.	1б.
7.	Делается вывод, что $\left(a^2+b^2+c^2\right)\vdots(a+b+c)$.	1б.
	Общее количество баллов	**7 баллов**

10.8. Найдите все значения действительного параметра a, для которых уравнение $2\cdot\left|2\cdot|x|-a^2\right|=x-a$ имеет ровно три действительных решения.

Этапы решения со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Исследование случая $a=0$ и получение одного решения $x=0$.	1б.
2.	Вводится функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-a$ и делается вывод, что график функции – прямая параллельная к прямой $y=x$ и которая проходит через точку $(a;0)$.	1б.
3.	Вводится функция $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2\cdot\left|2\cdot|x|-a^2\right|$ и делается вывод, что она чётная.	1б.
4.	Представление $g(x)$ без модуля для $x\in\mathbb{R}$.	1б.
5.	Делается вывод, что график функции $G(g)$ - совокупность двух полупрямых и двух отрезков, а угловые коэффициенты прямых содержащих данные фигуры равны -4 или 4.	1б.
6.	Делается вывод, что данное уравнение будет иметь три действительных решений если $G(f)$ содержит точку $\left(-\frac{a^2}{2};0\right)$ или точку $\left(0;2a^2\right)$.	1б.
7.	Получение $a\in\left\{-2;-\frac{1}{2}\right\}$.	1б.
	Общее количество баллов	**7 баллов**