РЕСПУБЛИКАНСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
Первый день, 4 марта 2023 г., X класс
СХЕМА ОЦЕНИВАНИЯ

Примечание: Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.

10.1. Пусть m и n целые числа такие, что $\frac{n^3}{m+n}$ – целое число. Покажите, что $\frac{2023\cdot m^4}{m+n}$ – целое число.

Этапы решения со схемой распределения баллов

Шаг	**Этапы решения**	**Количество баллов**
1.	Рассмотрение числа $\frac{m^3}{m+n}$.	1б.
2.	Вычисление суммы $\frac{m^3}{m+n}+\frac{n^3}{m+n}$ и получение m^2-mn+n^2.	2б.
3.	Указывание, что $m^2-mn+n^2\in\mathbb{Z}$.	1б.
4.	Получение $\frac{m^3}{m+n}\in\mathbb{Z}$.	1б.
5.	Представление числа $\frac{2023\cdot m^4}{m+n}$ в форме $2023\cdot m\cdot\frac{m^3}{m+n}$.	1б.
6.	Получение $\frac{2023\cdot m^4}{m+n}\in\mathbb{Z}$.	1б.
	Общее количество баллов	**7 баллов**

Другой метод решения:

10.1. Пусть m и n целые числа такие, что $\frac{n^3}{m+n}$ – целое число. Покажите, что $\frac{2023\cdot m^4}{m+n}$ – целое число.

Этапы решения со схемой распределения баллов

Шаг	**Этапы решения**	**Количество баллов**
1.	Делается вывод, что $n^3=a\left(m+n\right),\ a\in\mathbb{Z}$.	1б.
2.	Исследование случая $a=0$ и получение $\frac{2023\cdot m^4}{m+n}\in\mathbb{Z}$.	1б.
3.	Исследование случая $a\neq 0$ и получение $m=\frac{n^3-an}{a}$.	1б.
4.	Получение $\frac{m^3}{m+n}=\frac{\left(n^2-a\right)^3}{a^2}$.	1б.
5.	Получение $\frac{m^3}{m+n}=\frac{n^6}{a^2}-\frac{3n^4}{a}+3n^2-a$.	1б.
6.	Указывается, что $n^3\,\vdots\,a,\ n^6\,\vdots\,a^2,\ n^4=\left(n^3\cdot n\right)\vdots\,a$.	1б.
7.	Получение $\frac{2023\cdot m^4}{m+n}\in\mathbb{Z}$.	1б.
	Общее количество баллов	**7 баллов**

10.2. Дан остроугольный треугольник ABC и H – внутренняя точка треугольника такая, что $AB^2+CH^2=BC^2+AH^2=AC^2+BH^2$. Докажите, что H – ортоцентр треугольника ABC.		
Этапы решения со схемой распределения баллов		
Шаг	**Этапы решения**	**Количество баллов**
1.	Проведение $CC_1\perp AB, C_1\in AB$ и $HH_1\perp AB, H_1\in AB$ (или два других случая: перпендикуляры на AC или на BC)	1б.
2.	Получение соотношений $AC^2-AC_1^2=BC^2-BC_1^2$ и $AH^2-AH_1^2=BH^2-BH_1^2$.	1б.
3.	Получение соотношений $AC^2-BC^2=AC_1^2-BC_1^2$ и $AH^2-BH^2=AH_1^2-BH_1^2$.	1б.
4.	Получение соотношения $AC_1^2-BC_1^2=AH_1^2-BH_1^2$.	1б.
5.	Получение $AC_1=AH_1$.	1б.
6.	Делается вывод, что $H\in CC_1$.	1б.
7.	Отмечается, что H принадлежит остальным высотам.	1б.
	Общее количество баллов	**7 баллов**

Примечание: Если показывается, только, что ортоцентр удовлетворяет заданным в условии задачи соотношениям, присуждается не более одного балла.

10.3. Дано выражение $E=\dfrac{3(x+y)(z+t)}{8}\cdot\left(\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{zt}\right)$, где $x,y,z,t\in[1;3]$. Найдите наибольшее и наименьшее возможные значения выражения E.		
Этапы решения со схемой распределения баллов		
Шаг	**Этапы решения**	**Количество баллов**
1.	Получение $\dfrac{8E}{3}=\left(\dfrac{x}{z}+\dfrac{z}{x}\right)+\left(\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{y}\right)+\left(\dfrac{y}{t}+\dfrac{t}{y}\right)+\left(\dfrac{t}{x}+\dfrac{x}{t}\right)$.	1б.
2.	Показывается, что $E\ge 3$.	1б.
3.	Отмечается когда $E=3$. (*Балл присуждается только если показывается, что* $E\ge 3$)	1б.
4.	Получение $a-3b\le 0$ и $3a-b\ge 0$.	1б.
5.	Получение $(a-3b)(3a-b)\le 0$.	1б.
6.	Получение $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\le\dfrac{10}{3}$ и $E\le 5$.	1б.
7.	Отмечается когда $E=5$. (*Балл присуждается только если показывается, что* $E\le 5$)	1б.
	Общее количество баллов	**7 баллов**

10.4. Найдите все значения действительного параметра a, для которых уравнение $\sqrt{x-9}=ax+7a-3$ имеет единственное действительное решение.		
Этапы решения со схемой распределения баллов		
Шаг	**Этапы решения**	**Количество баллов**
1.	Записывается данное уравнение в виде $a\left(\sqrt{x-9}\right)^2-\sqrt{x-9}+16a-3=0$.	1б.
2.	Исследование случая $a=0$ и получение $x\in\varnothing$.	1б.
3.	Получение уравнения $t^2-\frac{1}{a}\cdot t+16-\frac{3}{a}=0\ (*)$, где $t=\sqrt{x-9},\ t\geq 0$.	1б.
4.	Исследование случая $\Delta(a)=0$.	1б.
5.	Делается вывод, что для $\Delta(a)>0$ только одно решение уравнения $(*)$ должно быть больше либо равно нулю.	1б.
6.	Исследование случая, когда одно решение равно нулю.	1б.
7.	Исследование случая, когда только одно решение положительно.	1б.
	Общее количество баллов	**7 баллов**