OLIMPIADA REPUBLICANĂ LA MATEMATICĂ
A doua zi, 5 martie 2023, Clasa a X–a

BAREM DE EVALUARE

Remarcă. ***Rezolvarea corectă a oricărei probleme se apreciază cu 7 puncte.***

10.5. Fie $P(X)$ un polinom cu coeficienți reali, astfel încât $x\cdot P(x+2022)-(x+2023)\cdot P(x)=2022\cdot x-2023$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Aflați restul împărțirii polinomului $P(X)$ la polinomul $Q(X)=X^2+X$.

Rezolvare cu barem de evaluare

Pas	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Se obține $P(0)=1$.	1 punct
2.	Se obține $P(-1)=2023$.	1 punct
3.	Se conchide că restul împărțirii lui $P(X)$ la $Q(X)$ este $R(X)=aX+b$.	1 punct
4.	Se obține că $P(x)=(x^2+x)\cdot C(x)+ax+b \quad (*)$.	1 punct
5.	Se obține sistemul $\begin{cases} P(0)=0\cdot C(0)+a\cdot 0+b \\ P(-1)=0\cdot C(-1)-a+b \end{cases}$.	1 punct
6.	Se obține $a=-2022$, $b=1$ și restul $R(X)=-2022X+1$.	1 punct
7.	Se arată că există polinomul $P(X)$ care verifică relația din enunțul problemei.	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

10.6. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic, în care $m(\angle BAC)=60^\circ$, iar $BC=a$. Fie M mijlocul laturii BC, iar $[BB_1]$ și $[CC_1]$ două înălțimi ale triunghiului. Calculați suma distanțelor de la ortocentrul triunghiului ABC până la laturile triunghiului MB_1C_1.

Rezolvare cu barem de evaluare

Pas	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Se obține că $MB_1=\frac{BC}{2}=\frac{a}{2}$.	1 punct
2.	Se obține $MC_1=\frac{a}{2}$.	1 punct
3.	Se arată că $\triangle AB_1C_1\sim\triangle ABC$.	1 punct
4.	Se obține $B_1C_1=\frac{a}{2}$ și se conchide că triunghiul MB_1C_1 este echilateral.	1 punct
5.	Se determină aria $\mathcal{A}(MB_1C_1)=\frac{a^2\sqrt{3}}{16}$.	1 punct
6.	Se obține $\mathcal{A}(MB_1C_1)=\frac{a}{4}\cdot d(H;MB_1)+\frac{a}{4}\cdot d(H;MC_1)+\frac{a}{4}\cdot d(H;B_1C_1)$.	1 punct
7.	Se obține $d(H;MB_1)+d(H;MC_1)+d(H;B_1C_1)=\frac{a\sqrt{3}}{4}$.	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

10.7. Fie numerele $a,b,c\in\mathbb{N}^*$, astfel încât $\dfrac{a\sqrt{2023}+b}{a+c\sqrt{2023}}$ este un număr rațional. Arătați că $\left(a^2+b^2+c^2\right)\vdots\left(a+b+c\right)$.		
Rezolvare cu barem de evaluare		
Pas	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Se conchide că $\dfrac{a\sqrt{2023}+b}{a+c\sqrt{2023}}=\dfrac{m}{n}$, $m,n\in\mathbb{N}^*$.	1 punct
2.	Se obține $\left(na-mc\right)\sqrt{2023}=ma-nb$.	1 punct
3.	Se conchide că $na-mc=0$ și $ma-nb=0$.	1 punct
4.	Se obține $a+b+c=c\left(\dfrac{m^2}{n^2}+\dfrac{m}{n}+1\right)$.	1 punct
5.	Se obține $a^2+b^2+c^2=c^2\left(\dfrac{m^2}{n^2}+\dfrac{m}{n}+1\right)\left(\dfrac{m^2}{n^2}-\dfrac{m}{n}+1\right)$.	1 punct
6.	Se obține $a^2+b^2+c^2=\left(a+b+c\right)\left(b-a+c\right)$.	1 punct
7.	Se conchide că $\left(a^2+b^2+c^2\right)\vdots\left(a+b+c\right)$.	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

10.8. Determinați toate valorile parametrului real a, pentru care ecuația $2\cdot\left\|2\cdot\|x\|-a^2\right\|=x-a$ are exact trei soluții reale.		
Rezolvare cu barem de evaluare		
Pas	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Se studiază cazul $a=0$ și se obține o soluție $x=0$.	1 punct
2.	Se consideră $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f\left(x\right)=x-a$ și se conchide că $G\left(f\right)$ este o dreaptă paralelă cu dreapta suport a bisectoarelor cadranelor I și III, care trece prin punctul $\left(a;0\right)$.	1 punct
3.	Se consideră $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g\left(x\right)=2\cdot\left\|2\cdot\|x\|-a^2\right\|$ și se conchide că este funcție pară.	1 punct
4.	Se determină formula lui $g\left(x\right)$ fără modul pentru $x\in\mathbb{R}$.	1 punct
5.	Se conchide că $G\left(g\right)$ este reuniunea a două semidrepte și a două segmente, unde dreptele suport ale acestora au pantele -4 sau 4.	1 punct
6.	Se conchide că ecuația inițială va avea trei soluții reale distincte, dacă $G\left(f\right)$ trece prin punctul $\left(-\dfrac{a^2}{2};0\right)$ sau prin punctul $\left(0;2a^2\right)$.	1 punct
7.	Se obține $a\in\left\{-2;-\dfrac{1}{2}\right\}$.	1 punct
	Punctaj total	7 puncte