OLIMPIADA REPUBLICANĂ LA MATEMATICĂ
Prima zi, 4 martie 2023, Clasa a X–a
BAREM DE EVALUARE

Remarcă. ***Rezolvarea corectă a oricărei probleme se apreciază cu 7 puncte.***

10.1. Fie m și n două numere întregi, astfel încât $\frac{n^3}{m+n}$ este un număr întreg. Arătați că $\frac{2023\cdot m^4}{m+n}$ este un număr întreg.

Rezolvare cu barem de evaluare

Pas	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Se consideră numărul $\frac{m^3}{m+n}$.	1 punct
2.	Se calculează suma $\frac{m^3}{m+n}+\frac{n^3}{m+n}$ și se obține m^2-mn+n^2.	2 punct
3.	Se observă că $m^2-mn+n^2\in\mathbb{Z}$.	1 punct
4.	Se obține $\frac{m^3}{m+n}\in\mathbb{Z}$.	1 punct
5.	Se menționează forma numărului $\frac{2023\cdot m^4}{m+n}=2023\cdot m\cdot\frac{m^3}{m+n}$.	1 punct
6.	Se obține $\frac{2023\cdot m^4}{m+n}\in\mathbb{Z}$.	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

Altă metodă de rezolvare:

10.1. Fie m și n două numere întregi, astfel încât $\frac{n^3}{m+n}$ este un număr întreg. Arătați că $\frac{2023\cdot m^4}{m+n}$ este un număr întreg.

Rezolvare cu barem de evaluare

Pas	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Se conchide că $n^3=a\left(m+n\right)$, $a\in\mathbb{Z}$.	1 punct
2.	Se studiază cazul $a=0$ și se obține $\frac{2023\cdot m^4}{m+n}\in\mathbb{Z}$.	1 punct
3.	Se studiază cazul $a\neq 0$ și se obține $m=\frac{n^3-an}{a}$.	1 punct
4.	Se obține $\frac{m^3}{m+n}=\frac{\left(n^2-a\right)^3}{a^2}$.	1 punct
5.	Se obține $\frac{m^3}{m+n}=\frac{n^6}{a^2}-\frac{3n^4}{a}+3n^2-a$.	1 punct
6.	Se menționează că $n^3 \vdots a,\ n^6 \vdots a^2,\ n^4=\left(n^3\cdot n\right)\vdots a$.	1 punct
7.	Se obține $\frac{2023\cdot m^4}{m+n}\in\mathbb{Z}$.	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

10.2. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic, iar H un punct din interiorul triunghiului, astfel încât $AB^2+CH^2=BC^2+AH^2=AC^2+BH^2$. Demonstrați că H este ortocentrul triunghiului *ABC*.		
Rezolvare cu barem de evaluare		
Pas	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Se construiește $CC_1 \perp AB, C_1 \in AB$ și $HH_1 \perp AB, H_1 \in AB$ (sau celelalte două cazuri duale: perpendicularele pe AC sau pe BC)	1 punct
2.	Se obțin relațiile $AC^2-AC_1^2=BC^2-BC_1^2$ și $AH^2-AH_1^2=BH^2-BH_1^2$.	1 punct
3.	Se obțin relațiile $AC^2-BC^2=AC_1^2-BC_1^2$ și $AH^2-BH^2=AH_1^2-BH_1^2$.	1 punct
4.	Se obține relația $AC_1^2-BC_1^2=AH_1^2-BH_1^2$.	1 punct
5.	Se obține $AC_1=AH_1$.	1 punct
6.	Se conchide că $H \in CC_1$.	1 punct
7.	Se menționează că în mod similar H aparține celorlalte înălțimi.	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

Remarcă: Dacă se arată doar că ortocentrul verifică relația din enunțul problemei, se acordă cel mult un punct.

10.3. Fie expresia $E=\dfrac{3(x+y)(z+t)}{8}\cdot\left(\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{zt}\right)$, unde $x,y,z,t\in[1;3]$. Determinați cea mai mare valoare și cea mai mică valoare posibile ale expresiei E.		
Rezolvare cu barem de evaluare		
Pas	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Se obține $\dfrac{8E}{3}=\left(\dfrac{x}{z}+\dfrac{z}{x}\right)+\left(\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{y}\right)+\left(\dfrac{y}{t}+\dfrac{t}{y}\right)+\left(\dfrac{t}{x}+\dfrac{x}{t}\right)$.	1 punct
2.	Se arată că $E\geq 3$.	1 punct
3.	Se menționează când $E=3$. (*Punctul se acordă doar dacă se arată că* $E\geq 3$)	1 punct
4.	Se obțin relațiile $a-3b\leq 0$ și $3a-b\geq 0$.	1 punct
5.	Se obține $(a-3b)(3a-b)\leq 0$.	1 punct
6.	Se obține relația $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\leq\dfrac{10}{3}$ și $E\leq 5$.	1 punct
7.	Se menționează când $E=5$. (*Punctul se acordă doar dacă se arată că* $E\leq 5$)	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

10.4. Determinați toate valorile parametrului real a, pentru care ecuația $\sqrt{x-9} = ax + 7a - 3$ are o soluție reală unică.		
Rezolvare cu barem de evaluare		
Pas	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Se scrie ecuația dată în forma $a\left(\sqrt{x-9}\right)^2 - \sqrt{x-9} + 16a - 3 = 0$.	1 punct
2.	Se studiază cazul $a = 0$ și se obține $x \in \varnothing$.	1 punct
3.	Se obține ecuația $t^2 - \frac{1}{a} \cdot t + 16 - \frac{3}{a} = 0\ (*)$, unde $t = \sqrt{x-9}$, $t \geq 0$.	1 punct
4.	Se studiază cazul $\Delta(a) = 0$.	1 punct
5.	Se conchide că pentru $\Delta(a) > 0$ doar una dintre soluțiile ecuației $(*)$ trebuie să fie mai mare sau egală cu zero.	1 punct
6.	Se studiază cazul când una dintre soluții este zero.	1 punct
7.	Se studiază cazul când numai una dintre soluții este pozitivă.	1 punct
	Punctaj total	7 puncte