Olimpiada Republicană la Matematică
5 marite 2022, Clasa a IX–a
Soluții

Problema 9.1. *La centrul „Anticovid” din localitatea N au fost aduse vaccinuri de două tipuri: A și B. Vaccinurile A erau ambalate, în mod egal, în 9 cutii. Vaccinurile B erau ambalate, de asemenea în mod egal, în 14 cutii. În total au fost aduse 363 vaccinuri. Câte vaccinuri de fiecare tip au fost aduse în localitatea N, dacă se știe că numărul vaccinurilor A era mai mare decât numărul vaccinurilor B?*

Soluția 1. Fie $x \in N^*$ numărul vaccinurilor A dintr-o cutie, iar $y \in N^*$ numărul vaccinurilor B dintr-o cutie. Conform condiției, $9x+14y=363$. Evident, y se divide la 3; fie $y=3z,\ z \in N^*$. Ecuația capătă forma

$$3x+14z=121 \qquad (1)$$

și urmează a fi rezolvată în numere naturale.

Din ecuație se obține consecutiv:

$3x=121-14z=(120-15z)+(z+1)=3(40-5z)+(z+1) \Rightarrow x=40-5z+\dfrac{z+1}{3}$. Fracția obținută trebuie să fie un întreg; fie $\dfrac{z+1}{3}=k$, unde $k \in N^*$. Rezultă $z=3k-1$. Astfel, $x=40-5(3k-1)+k$, adică $x=45-14k$. Din (1) se află $14z=121-3x=121-3(45-14k)=42k-14$, de unde $z=3k-1$. Dar atunci $y=3z$; $y=9k-3$. S-a aflat soluția generală a ecuației (1)

$$\begin{cases} x=45-14k, \\ y=9k-3, \end{cases} k \in N^*. \qquad (2)$$

Cum x și y sunt numere naturale, se impugn condițiile $45-14k>0$ și $9k-3>0$, adică $\dfrac{1}{3}<k<3\dfrac{3}{14}$.

Pentru k există trei posibilități: $k=1,\ k=2,\ k=3$. Din (2) se află x și y.

Pentru $k=1$ se obține $x=31,\ y=6$. Au fost aduse $9x=279$ vaccinuri A și $14y=84$ vaccinuri B.

Pentru $k=2$ se obține $x=17,\ y=15$. Au fost aduse $9x=153$ vaccinuri A și $14y=210$ vaccinuri B.

Pentru $k=3$ se obține $x=3,\ y=24$. Au fost aduse $9x=27$ vaccinuri A și $14y=336$ vaccinuri B.
Astfel, conform condiției, au fost aduse 279 vaccinuri A și 84 vaccinuri B.

Soluția 2. Fie $x \in N^*$ numărul vaccinurilor A dintr-o cutie, iar $y \in N^*$ numărul vaccinurilor B dintr-o cutie. Conform condiției, $9x+14y=363$. Evident, y se divide la 3; fie $y=3z,\ z \in N^*$. Ecuația capătă forma $3x+14z=121$ și urmează a fi rezolvată în numere naturale nenule. Din $3x+14z=121$ obținem $14z \le 121 \Leftrightarrow z \le \dfrac{121}{14}$ și cum $z \in N^*$ obținem $1 \le z \le \left[\dfrac{121}{14}\right]=8$, deci $z \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
(cu $[x]$ -am notat partea întreagă a numîrului x). Alcătuim următorul tabel:

z	1	2	3	4	5	6	7	8
$14z$	14	28	42	56	70	84	98	112
$121-14z$	107	93	79	65	51	37	23	9
$\dfrac{121-14z}{3}=x$	$\dfrac{107}{3} \notin N^*$	31	$\dfrac{79}{3} \notin N^*$	$\dfrac{65}{3} \notin N^*$	17	$\dfrac{37}{3} \notin N^*$	$\dfrac{23}{3} \notin N^*$	3
$3z=y$		6			15			24
$9x$		279			153			27
$14y$		84			210			336

Astfel, din tabel rezultă că, conform condiției, au fost aduse 279 vaccinuri A și 84 vaccinuri B $(279 > 84)$.

Problema 9.2. *Aflați toate funcțiile* $f: R \to R,$ *care satisfac condițiile* $f(0) > 0$ *și*

$$f(x+y) = f(x)\cdot f(2022-y) + f(y)\cdot f(2022-x)$$

pentru oricare $x, y \in R.$

1) Punând $x = y = 0$ în egalitatea din enunț, se obține

$$f(0) = f(0)\cdot f(2022) + f(0)\cdot f(2022) = 2f(0)\cdot f(2022) \Rightarrow f(2022) = \frac{1}{2}. \qquad (1)$$

2) Pentru $x = 2022,\ y = 0$ se obține $\frac{1}{2} = f(2022) = f(2022)\cdot f(2022) + f(0)\cdot f(0) = \frac{1}{4} + (f(0))^2.$

Rezultă $f(0) = \pm\frac{1}{2}.$ Cum însă $f(0) > 0$, rezultă $f(0) = \frac{1}{2}.$

3) Pentru $y = 0$ egalitatea din enunț implică

$f(x) = f(x)f(2022) + f(0)f(2022-x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(2022-x),$ de unde rezultă $f(x) = f(2022-x).$

4) Folosind egalitatea din enunț, se obține

$$\frac{1}{2} = f(2022) = f(x + (2022-x)) = f(x)\cdot f(x) + f(x)\cdot f(x) = 2[f(x)]^2 \quad \Rightarrow f(x) = \pm\frac{1}{2}.$$

Cum însă $f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = 2\left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 \ge 0,$ rezultă $f(x) = \frac{1}{2}$ pentru oricare $x, y \in R.$

5) Verificare: partea stângă: $f(x+y) = \frac{1}{2};$ partea dreaptă: $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$

Astfel, $f(x) = \frac{1}{2}$ pentru oricare $x \in R.$

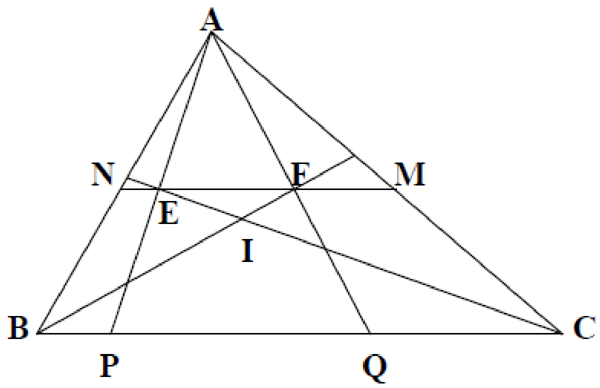
Problema 9.3. *În triunghiul scalen* ABC *notăm cu* I *punctul de intersecție al bisectoarelor. Demonstrați că dreapta, care include linia mijlocie a triunghiulu, paralelă cu* BC, *intersectează dreptele* BI *și* CI *în puncte, situate pe cercul de diametru* $[AI]$.

Fie N mijlocul laturii $[AB]$ și M mijlocul laturii $[AC]$**.** Fie $MN \cap BI = \{F\}$, $MN \cap CI = \{E\}$, $AE \cap BC = \{P\}$, $AF \cap BI = \{Q\}$. Este clar că în ΔPAB, NE este linie mijlocie $\Rightarrow [AE] = [PE]$, Deci în ΔAPC CE este bisectore și mediană $\Rightarrow$

$$CE \perp AP. \qquad (1)$$

Analog se arată că

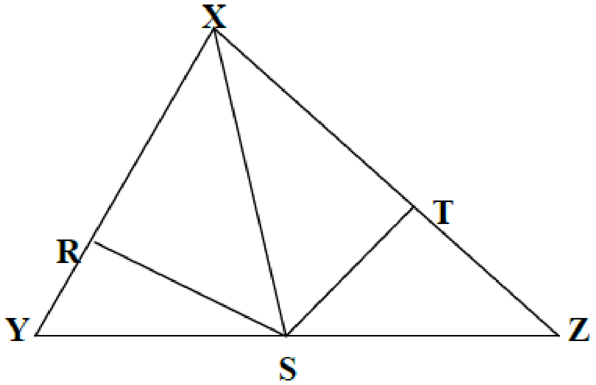
$$BI \perp AQ. \qquad (2)$$



Din (1) și (2) $\Rightarrow AEIF$ este inscriptibil și coarda $[AI]$ este opusă unghiului drept $\measuredangle AEC$, deci $[AI]$ este diametru. (Altfel ΔAFI este dreptunghic cu $m(\measuredangle AFI) = 90^\circ$**,** rezultă că $[AI]$ este diametrul cercului circumscris triunghiului ΔAFI. Analog judecând, obținem ΔAEI este dreptunghic cu

$m(\measuredangle AEI)=90^{\circ}$, rezultă că $[AI]$ este diametrul cercului circumscris triunghiului ΔAEI. Două cercuri cu diametrul comun coincid.)

Demonstrăm că într-un triunghi, dacă o bisectoare este și mediană, atunci ea este și înălțime.



Fie în ΔXYZ, $[XS]$, $(S\in[YZ])$ este bisectoare și mediană. Fie $ST\perp XZ,\ (T\in XZ)$, $SR\perp XY,\ (R\in XY)$. Cum $[XS]$ este bisectoare și mediană $\Rightarrow YS=SZ,\ SR=ST$. De aici rezultă congruența triunghiurilor dreptunghice: $\Delta STZ\equiv\Delta SRZ$ și $\Delta STX\equiv\Delta SRX$. Din aceste congruențe obținem:

$m(\measuredangle TSX)=m(\measuredangle RSX)$, $m(\measuredangle TSZ)=m(\measuredangle RSY)$,

deci $m(\measuredangle ZSX)=m(\measuredangle YSX)=90^{\circ}\Rightarrow XS\perp YZ$. Astfel $[XS]$ este înălțime în ΔXYZ.

Problema 9.4. *Fie a, b, c numere reale pozitive distincte. Demonstrați, că ecuația*

$$(a+b+c)x^2+2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)x+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=0$$

are două soluții reale distincte.

Fie Δ discriminantul ecuației date. Atunci $\Delta_1=\frac{\Delta}{4}=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2-(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=$

$$=\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+2\frac{a}{c}+2\frac{b}{a}+2\frac{c}{b}-3-\left(\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\right)=$$

$$=\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}-3-\frac{a}{b}-\frac{b}{c}-\frac{c}{a}=\left(\frac{a^2}{b^2}-\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-1\right)+\left(\frac{b^2}{c^2}-\frac{b}{c}+\frac{c}{b}-1\right)+\left(\frac{c^2}{a^2}-\frac{c}{a}+\frac{a}{c}-1\right).$$

În continuare, se evaluează expresiile din paranteze. Se obține:

$$\frac{a^2}{b^2}-\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-1=\frac{a^3-a^2b+b^3-ab^2}{ab^2}=\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)-ab(a+b)}{ab^2}=\frac{(a+b)(a-b)^2}{ab^2}>0.$$

În mod absolut asemănător se obțin inegalitățile

$$\frac{b^2}{c^2}-\frac{b}{c}+\frac{c}{b}-1=\frac{(b+c)(b-c)^2}{bc^2}>0 \text{ și } \frac{c^2}{a^2}-\frac{c}{a}+\frac{a}{c}-1=\frac{(c+a)(c-a)^2}{ca^2}>0.$$

Prin adunarea ultimelor trei inegalități se obține, $\Delta_1>0$, prin urmare, ecuația are două soluții reale distincte. Astfel, afirmația este demonstrată.

Problema 9.5. *Mulțimea de numere $0,1,2,\ldots,2022$ este împărțită în două grupe. Prima grupă conține numerele cu suma pară a cifrelor, iar grupa a doua – cu suma impară a cifrelor. Aflați diferența dintre suma numerelor din prima grupă și suma numerelor din grupa a doua.*

1) Pentru început, vom diviza mulțimea de numere $0,1,2,...,999$ în submulțimi a câte 10 numere naturale incluse respectiv în intervalele:

$$[0,9],\ [10,19],\ [20,29],...,\ [990,999]. \qquad (1)$$

În fiecare astfel de submulțime numerele au ultima cifră $0,1,2,..,9$ în ordine crescătoare. Prin urmare, oricare două numere consecutive au sumele cifrelor de parități diferite.

2) Numerele k și $(1000+k)$, unde $k \in \{0,1,2,3,...,999\}$ au sumele cifrelor de parități diferite. Avem $(1000+k) \in \{1000,1001,1002,...,1999\}$. În fiecare dintre submulțimile menționate mai sus (care conțin câte 10 elemente) adăugăm și numerele de forma $1000+k$, pentru toate numerele *k* din această submulțime.

3) Din acest moment, toate numerele din mulțimea $\{0,1,2,...,1999\}$ figurează în submulțimi a câte 20 numere în fiecare. În oricare dintre submulțimile cu 20 de elemente suma numerelor din prima grupă (care au suma cifrelor pară), este egală cu suma numerelor din grupa a doua (care au suma cifrelor impară). De exemplu, pentru submulțimea $\{150,151,152,...,159,1150,1151,1152,...,1159\}$ se obține

150	1151	152	1153	154	1155	156	1157	158	1159
1150	151	1152	153	1154	155	1156	157	1158	159

Sau la general, dacă *k* este un număr cu cifra unităților 0, atunci în submulțimea de 20 de numere care se obține în modul precedent obținem două grupuri de numere cu sume a cifrelor de aceeași paritate:

k	k+2	k+4	k+6	k+8	1000+k+1	1000+k+3	1000+k+5	1000+k+7	1000+k+9
k+1	k+3	k+5	k+7	k+9	1000+k	1000+k+2	1000+k+4	1000+k+6	1000+k+8

Se verifică direct că sumele numerelor din fiecare grup sunt egale cu 5000+10k+45, deci diferența lor este 0.

4) În concluzie, pentru mulțimea $\{0,1,2,...,1999\}$ diferența dintre suma numerelor din prima grupă și suma numerelor din grupa a doua este egală cu 0.

5) Pentru numerele rămase $2000, 2001, 2002,..., 2022$ se calculează nemijlocit sumele numerelor din fiecare grupă. Se obține:

2000, 2002, 2004, 2006, 2008, 2011, 2013, 2015, 2017, 2019, 2020, 2022 – 12 numere cu suma pară a cifrelor;

2001, 2003, 2005, 2007, 2009, 2010, 2012, 2014, 2016, 2018, 2021 – 11 numere cu suma impară a cifrelor.

Diferența dintre sumele numerelor din aceste grupe este egală cu 2021.

Astfel, diferența dintre sumele numerelor din cele două grupe din enunț este egală cu 2021.