

**Математическая олимпиада Республики Молдова**

**5 марта 2022, IX–й класс**

Схема оценки работ

<p><b>Задача 9.1.</b> В центре „Anticovid” населенного пункта <math>N</math> привезли вакцины двух типов: <math>A</math> и <math>B</math>. Вакцины <math>A</math> были упакованы, в равном количестве, в 9 коробках. Вакцины <math>B</math> были упакованы, также в равном количестве, в 14 коробках. Всего было привезено 363 вакцин. Сколько вакцин каждого типа было привезено в населенном пункте <math>N</math>, если известно, что число вакцин <math>A</math> было больше числа вакцин <math>B</math>?</p>		
Этапы решения со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Кол-во баллов
1.	Обозначает через $x, y \in N^*$ число вакцин каждого типа в одной коробке и получает уравнение $9x + 14y = 363$	1 балл
2.	Приводит уравнение к виду $3x + 14z = 121$ , где $y = 3z, z \in N^*$	1 балл
3.	Находит общее решение уравнения $x = 45 - 14k, y = 9k - 3; k \in N^*$	2 балла
4.	Выбирает значения $k: k = 1, 2, 3$ , при которых $x, y$ - натуральные числа	1 балл
5.	Для каждого значения $k$ находит число вакцин каждого типа	1 балл
6.	Выбирает окончательное решение.	1 балл
<b>Общее количество баллов:</b>		<b>7 баллов</b>

**Примечание:** Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.

**Математическая олимпиада Республики Молдова**

**5 марта 2022, IX–й класс**

Схема оценки работ

<p><b>Задача 9.2.</b> Найти все функции <math>f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}</math>, удовлетворяющие условиям <math>f(0) &gt; 0</math> и <math>f(x+y) = f(x) \cdot f(2022-y) + f(y) \cdot f(2022-x)</math> для всех <math>x, y \in \mathbb{R}</math>.</p>		
Этапы решения со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Кол-во баллов
1.	При $x = y = 0$ находит $f(2022) = \frac{1}{2}$	1 балл
2.	При $x = 2022$ и $y = 0$ находит $f(0) = \frac{1}{2}$	1 балл
3.	При $y = 0$ находит $f(x) = f(2022-x)$	1 балл
4.	Пишет $f(2022) = f(x + (2022-x))$ и находит $f(x) = \pm \frac{1}{2}$	2 балла
5.	Пишет $f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = 2 \left[ f\left(\frac{x}{2}\right) \right]^2 \geq 0 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}$	1 балл
6.	Проверяет полученное решение $f(x) = \frac{1}{2}$ , для всех $x \in \mathbb{R}$ .	1 балл
<b>Общее количество баллов:</b>		<b>7 баллов</b>

**Примечание:** Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.

**Математическая олимпиада Республики Молдова**  
**5 марта 2022, IX-й класс**  
 Схема оценки работ

**Задача 9.3.** В разностороннем треугольнике  $ABC$  обозначим через  $I$  точку пересечения биссектрис. Докажите, что прямая, содержащая среднюю линию треугольника параллельной  $BC$ , пересекает прямые  $BI$  и  $CI$  в точках, расположенных на окружности диаметра  $[AI]$ .

Этапы решения со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Кол-во баллов
1.	Строит медианну $[NM]$ в $\triangle ABC$ параллельной $BC$ , и точки $MN \cap BI = \{F\}$ , $MN \cap CI = \{E\}$ , $AE \cap BC = \{P\}$ , $AF \cap BI = \{Q\}$ .	1 балл
2.	Показывает, что в $\triangle PAB$ , $[NE]$ есть средняя линия, а в $\triangle AQC$ , $[FM]$ является средней линией	2 балла
3.	Доказывает, что $CE \perp AP$ , $BI \perp AQ$ .	2 балла
4.	Показывает, что прямоугольник $AEIF$ - вписанный	1 балл
5.	Показывает, что $[AI]$ является диаметром окружности, описанной около четырехугольника $AEIF$ .	1 балл
<b>Общее количество баллов:</b>		<b>7 puncte</b>

**Примечание:** Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.

**Математическая олимпиада Республики Молдова**  
**5 марта 2022, IX-й класс**  
 Схема оценки работ

**Задача 9.4.** Пусть  $a, b, c$  действительные положительные различные числа. Докажите, что уравнение

$$(a+b+c)x^2 + 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)x + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 0$$

имеет два действительных различных решения.

Этапы решения со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Кол-во баллов
1.	Находится дискриминант квадратного уравнения, который	1 балл
2.	приводится к виду $\left(\frac{a^2}{b^2} - \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 1\right) + \left(\frac{b^2}{c^2} - \frac{b}{c} + \frac{c}{b} - 1\right) + \left(\frac{c^2}{a^2} - \frac{c}{a} + \frac{a}{c} - 1\right)$ .	3 балла
3.	Показывается, что каждое из 3-х выражений в скобках положительно	2 балла
4.	Сложением устанавливается, что дискриминант уравнения положителен, следовательно, уравнение имеет два различных корня.	1 балл
<b>Общее количество баллов:</b>		<b>7 баллов</b>

**Примечание:** Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.

**Математическая олимпиада Республики Молдова**  
**5 марта 2022, IX–й класс**  
Схема оценки работ

<b>Задача 9.5.</b> Множество чисел $0,1,2,\dots,2022$ разбито на две группы. Первая группа содержит числа с четной суммой цифр, а вторая – с нечетной суммой цифр. Найти разность между суммой чисел первой группы и суммой чисел второй группы.		
Этапы решения со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Кол-во баллов
1.	Показывает, что при $0 \leq k \leq 999$ числа $k$ и $1000+k$ принадлежат различным группам	2 балла
2.	Разбивает 1000 пар чисел $(k, 1000+k)$ , $k \in \{0,1,2,3,\dots,100\}$ в группы по 10 пар.	2 балла
3.	Показывает, что суммы чисел из обеих групп задачи совпадают, следовательно, разность между суммами равна 0	2 балла
4.	Для оставшихся чисел 2000, 2001, ..., 2022 выписывает числа, принадлежащие первой группе и числа, принадлежащие второй группе, и показывает, что разность их сумм равна 2021.	1 балл
<b>Общее количество баллов</b>		<b>7 баллов</b>

**Примечание:** Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.