Olimpiada Republicană la Matematică
5 martie 2022, Clasa a IX–a
Barem de evaluare

Problema 9.1. La centrul „Anticovid” din localitatea N au fost aduse vaccinuri de două tipuri: A si B. Vaccinurile A erau ambalate, în mod egal, în 9 cutii. Vaccinurile B erau ambalate, de asemenea în mod egal, în 14 cutii. În total au fost aduse 363 vaccinuri. Câte vaccinuri de fiecare tip au fost aduse în localitatea N, dacă se știe că numărul vaccinurilor A era mai mare decât numărul vaccinurilor B?

Rezolvare cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Notează cu $x, y \in N^*$ numărul de vaccinuri de fiecare tip dintr-o cutie și obține ecuația $9x+14y=363$	1 punct
2.	Reduce ecuația la forma $3x+14z=121$, unde $y=3z,\ z\in N^*$	1 punct
3.	Află soluția generală a ecuației $x=45-14k,\ \ y=9k-3;\ \ k\in N^*$	2 puncte
4.	Selectează valorile lui k: $k=1,2,3$, pentru care x, y sunt numere naturale	1 punct
5.	Pentru fiecare valoare a lui k află numărul vaccinurilor de fiecare tip	1 punct
6.	Selectează soluția finală.	1 punct
	Punctaj total:	**7 puncte**

Remarcă: *Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.*

Olimpiada Republicană la Matematică
5 martie 2022, Clasa a IX–a
Barem de evaluare

Problema 9.2. Aflați toate funcțiile $f: R \to R,$ care satisfac condițiile $f(0)>0$ și

$$f(x+y)=f(x)\cdot f(2022-y)+f(y)\cdot f(2022-x)$$

pentru oricare $x, y \in R.$

Rezolvare cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Pentru $x=y=0$ se află $f(2022)=\frac{1}{2}$	1 punct
2.	Pentru $x=2022$ și $y=0$ se află $f(0)=\frac{1}{2}$	1 punct
3.	Pentru $y=0$ se obține $f(x)=f(2022-x)$	1 punct
4.	Se scrie $f(2022)=f(x+(2022-x))$ și se află $f(x)=\pm\frac{1}{2}$	2 puncte
5.	Se scrie $f(x)=f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=2\left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2\geq 0 \Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}$	1 punct
6.	Se verifică soluția aflată $f(x)=\frac{1}{2}$, pentru oricare $x\in\mathbb{R}$.	1punct
	Punctaj total:	**7 puncte**

Remarcă: *oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.*

Olimpiada Republicană la Matematică
5 martie 2022, Clasa a IX–a
Barem de evaluare

Problema 9.3. În triunghiul scalen ABC notăm cu I punctul de intersecție al bisectoarelor. Demonstraţi, că dreapta, care include linia mijlocie a triunghiului paralelă cu BC, intersectează dreptele BI și CI în puncte, situate pe cercul de diametru $[AI]$.

Rezolvare cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Construiește mediana $[NM]$ in ΔABC paralelă cu BC, și punctele $MN \cap BI = \{F\}$, $MN \cap CI = \{E\}$, $AE \cap BC = \{P\}$, $AF \cap BI = \{Q\}$.	1 punct
2.	Arată că în ΔPAB, $[NE]$ este linie mijlocie, iar în ΔAQC, $[FM]$ este linie mijlocie	2 punct
3.	Demonstrează că $CE \perp AP$, $BI \perp AQ$.	2 punct
4.	Arată că patrulaterul $AEIF$ este inscriptibil	1 puncte
5.	Arată că $[AI]$ este diametrul cercului circumscris patrulaterului $AEIF$.	1 punct
	Punctaj total:	**7 puncte**

Remarcă: *oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.*

Olimpiada Republicană la Matematică
5 martie 2022, Clasa a IX–a
Barem de evaluare

Problema 9.4. *Fie a, b, c numere reale pozitive distincte. Demonstrați, că ecuația*

$$(a+b+c)x^2 + 2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)x + \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = 0$$

are două soluții reale distincte.

Rezolvare cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Se află discriminantul ecuației pătrate, care	1 punct
2.	se aduce la forma $\left(\frac{a^2}{b^2}-\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-1\right)+\left(\frac{b^2}{c^2}-\frac{b}{c}+\frac{c}{b}-1\right)+\left(\frac{c^2}{a^2}-\frac{c}{a}+\frac{a}{c}-1\right)$.	3 puncte
3.	Se arată, că fiecare din cele 3 expresii din paranteze este pozitivă	2 puncte
4.	Prin adunare se stabilește, că discriminantul ecuației este pozitiv, deci ecuația are două soluții reale distincte.	1 punct
	Punctaj total:	**7 puncte**

Remarcă: *oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.*

Olimpiada Republicană la Matematică
5 martie 2022, Clasa a IX–a
Barem de evaluare

Problema 9.5. *Mulțimea de numere* $0, 1, 2, \ldots, 2022$ *este împărțită în două grupe. Prima grupă conține numerele cu suma pară a cifrelor, iar grupa a doua – cu suma impară a cifrelor. Aflați diferența dintre suma numerelor din prima grupă și suma numerelor din grupa a doua.*

Rezolvare cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Arată, că pentru $0 \le k \le 999$ numerele k și 1000+k nimeresc în grupe diferite	2 puncte
2.	Împarte cele 1000 de perechi de numere (k, $1000+k$), $k \in \{0,1,2,3,...,999\}$ în grupe a câte 10 perechi (20 de numere)	2 puncte
3.	Arată, că sumele numerelor din ambele grupe din enunț coincid, deci diferența dintre sume este egală cu 0	2 puncte
4.	Pentru numerele rămase 2000, 2001, …, 2022 scrie numerele, ce aparțin primei grupe și numerele, ce aparțin grupei a doua, și arată, că diferența sumelor lor este egală cu 2021.	1 punct
	Punctaj total:	**7 puncte**

Remarcă: *oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.*