

Olimpiada Republicană la Matematică

5 martie 2022, Clasa a VIII-a

8.1. Aflați toate soluțiile reale ale ecuației $x^3 - 9(1-x)^2 = x$.

Найдите все действительные решения уравнения $x^3 - 9(1-x)^2 = x$.

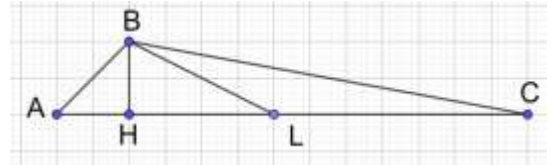
Soluție: $x^3 - 9(1-x)^2 = x \Leftrightarrow x^3 - x - 9(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1) - 9(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 8x + 9) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x^2-8x+9=0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{1, \frac{8-2\sqrt{7}}{2}, \frac{8+2\sqrt{7}}{2}\right\} \Leftrightarrow x \in \{1, 4-\sqrt{7}, 4+\sqrt{7}\}$.

Răspuns: $S = \{1, 4 - \sqrt{7}, 4 + \sqrt{7}\}$.

8.2. În triunghiul ABC sunt duse bisectoarea BL și înălțimea BH . Se știe că $BL = 2BH$. Poate oare triunghiul ABC să fie un triunghi ascuțitunghic? Argumentați.

В треугольнике ABC проведены биссектриса BL и высота BH . Известно, что $BL = 2BH$. Может ли треугольник ABC быть остроугольным? Приведите обоснование.

Soluție: Presupunem că triunghiul ABC este ascuțitunghic. Atunci H și L sunt puncte interioare ale laturii AC . Dacă $BL = 2BH$, atunci $m(\angle BLH) = 30^\circ$, iar $m(\angle HBL) = 60^\circ$. Din relația



$$m(\angle ABL) = m(\angle ABH) + m(\angle HBL) = m(\angle ABH) + 60^\circ$$

rezultă că $m(\angle ABL) > 60^\circ$. Cum BL este bisectoarea unghiului $ABC \Rightarrow m(\angle ABC) = 2 \cdot m(\angle ABL) > 120^\circ \Rightarrow$ unghiul ABC este obtuz. Am obținut contradicție cu presupunerea că triunghiul ABC este ascuțitunghic. Rezultă că triunghiul ABC nu poate fi ascuțitunghic.

8.3. Determinați numerele reale a_1, a_2, a_3, a_4 , care verifică egalitatea

$$\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2 - 1} + \sqrt{a_3 - 2} + \sqrt{a_4 - 3} = \frac{1}{2} \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) - 1.$$

Найдите действительные числа a_1, a_2, a_3, a_4 которые удовлетворяют равенству

$$\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2 - 1} + \sqrt{a_3 - 2} + \sqrt{a_4 - 3} = \frac{1}{2} \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) - 1.$$

Soluție: Expresiile cu radicali din egalitate au sens dacă: $a_1 \geq 0, a_2 \geq 1, a_3 \geq 2$ și $a_4 \geq 3$. Avem

$$\sqrt{1 \cdot a_1} \leq \frac{a_1+1}{2}, \sqrt{1 \cdot (a_2 - 1)} \leq \frac{a_2-1+1}{2} = \frac{a_2}{2}, \sqrt{1 \cdot (a_3 - 2)} \leq \frac{a_3-2+1}{2} = \frac{a_3-1}{2},$$

$$\sqrt{1 \cdot (a_4 - 3)} \leq \frac{a_4-3+1}{2} = \frac{a_4-2}{2}.$$

Însumând obținem:

$$\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2 - 1} + \sqrt{a_3 - 2} + \sqrt{a_4 - 3} \leq \frac{1}{2} \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 1 =$$

$$\frac{1}{2} \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) - 1.$$

Inegalitatea devine egalitate dacă numerele cărora le-am aplicat inegalitatea mediilor sunt egale. Deci $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 4$.

Răspuns: $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 4$.

8.4 Punctul O se află în interiorul triunghiului ABC . Dreapta BO intersectează AC în punctul E , iar dreapta AO intersectează BC în punctul D . Arătați că $\frac{AO \cdot EC}{AE \cdot OD} = 2$, dacă și numai dacă $BD = DC$.

Точка O расположена внутри треугольника ABC . Прямая BO пересекает AC в точке E , а прямая AO пересекает BC в точке D . Докажите, что $\frac{AO \cdot EC}{AE \cdot OD} = 2$, тогда и только тогда, когда $BD = DC$.

Soluție: Fie $\frac{AO \cdot EC}{AE \cdot OD} = 2 \Leftrightarrow AO \cdot EC = 2AE \cdot OD \Leftrightarrow \frac{AO}{2OD} = \frac{AE}{EC}$.

Construim punctul $F \in [AD, D \in (OF)]$, astfel încât $[DF] \equiv [OD]$. Avem relațiile

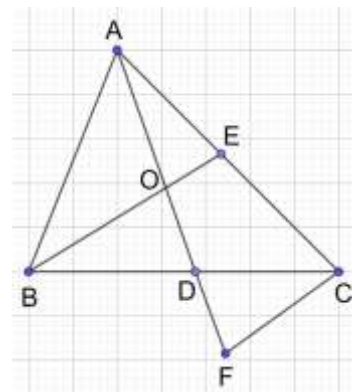
$$\frac{AO}{2OD} = \frac{AE}{EC} \Leftrightarrow \frac{AO}{OF} = \frac{AE}{EC}.$$

Conform teoremei reciproce a lui Thales, rezultă că dreptele CF și BE sunt paralele. Cum

$$[DF] \equiv [OD] \Rightarrow \triangle ODB \equiv \triangle FDC \text{ (U.L.U.)} \Rightarrow [BD] \equiv [DC].$$

Fie $[BD] \equiv [DC] \Rightarrow [AD]$ este mediană a triunghiului ABC . Construim punctul $F \in [AD, D \in (OF)]$, astfel încât $[DF] \equiv [OD]$. Cum $m(\angle ODB) = m(\angle FDC) \Rightarrow \triangle ODB \equiv \triangle FDC$ (L.U.L.) Obținem că $m(\angle OBD) = m(\angle FCD)$, ele fiind unghiuri alterne interne, obținute la intersecția dreptelor BE și CF cu secanta BC . Rezultă că dreptele BE și CF sunt paralele. Conform teoremei directe a lui Thales avem relațiile

$$\frac{AO}{OF} = \frac{AE}{EC} \Leftrightarrow \frac{AO}{2OD} = \frac{AE}{EC} \Leftrightarrow AO \cdot EC = 2AE \cdot OD \Leftrightarrow \frac{AO \cdot EC}{AE \cdot OD} = 2.$$



8.5. Aflați toate soluțiile reale ale ecuației $ax^2 + (a + 1)|x| - a - 1 = 0$, unde a este un parametru real. ($|x|$ reprezintă valoarea absolută a numărului x).

Soluție. Menționăm că, dacă numărul x_0 este o soluție a ecuației

$$ax^2 + (a + 1)|x| - a - 1 = 0, \quad (1)$$

atunci numărul $-x_0$ de asemenea este o soluție. De aceea, este suficient să găsim doar soluțiile nenegative ale ecuației (1), la care să adăugăm valorile lor opuse, pentru a obține toate soluțiile.

Deci, mai întâi vom considera ecuația (1) pe mulțimea valorilor $x \geq 0$. Pe această mulțime ecuația (1) capătă forma

$$ax^2 + (a + 1)x - a - 1 = 0 \quad (2)$$

(deoarece pentru $x \geq 0$ avem $|x| = x$).

Considerăm câteva cazuri.

1) Dacă $a = 0$, ecuație (2) este o ecuație de gradul întâi $x - 1 = 0$, care are soluția $x = 1$. Din considerentele expuse anterior, ecuația inițială (1) are soluțiile: $x_1 = -1, x_2 = 1$.

În continuare vom considera $a \neq 0$, pentru care ecuația (2) este de gradul doi cu discriminatul

$$D = (a + 1)^2 + 4a(a + 1) = (a + 1)(5a + 1) = 5a^2 + 6a + 1,$$

care oferă câteva cazuri.

2) Pentru $a \in (-1, -\frac{1}{5})$ discriminantul D este negativ și, deci, ecuația (2) nu are soluții reale. Respectiv, nici ecuația (1) nu are soluții.

3) Pentru $a = -1$ ecuația (2) capătă forma $-x^2 = 0$ cu soluția $x = 0$. Ecuația (1) în acest caz, de asemenea, are soluția $x = 0$.

4) Pentru $a = -\frac{1}{5}$ ecuația (2) se aduce la forma $-x^2 + 4x - 4 = 0$, care are soluția $x = 2$. În acest caz, ecuația (1) are soluțiile $x_1 = -2, x_2 = 2$.

5) Pentru $a \in (-\infty, -1) \cup (-\frac{1}{5}, +\infty)$ ecuația (2) are două soluții reale

$$x_1 = \frac{-a - 1 - \sqrt{5a^2 + 6a + 1}}{2a} = \frac{-a - 1}{2a} - \frac{\sqrt{5a^2 + 6a + 1}}{2a},$$

$$x_2 = \frac{-a - 1 + \sqrt{5a^2 + 6a + 1}}{2a} = \frac{-a - 1}{2a} + \frac{\sqrt{5a^2 + 6a + 1}}{2a}.$$

Conform teoremei lui Viète,

$$x_1 + x_2 = -\frac{a + 1}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = -\frac{a + 1}{a}.$$

Considerăm cazul $-\frac{a+1}{a} < 0$, ceea ce este echivalent cu $(a + 1)a > 0$, adică $a \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$. În acest caz, care se încadrează în condițiile p.5), ecuația (2) are o soluție negativă și alta pozitivă, și anume:

pentru $a \in (-\infty, -1)$ soluția pozitivă este $x = \frac{-a-1-\sqrt{5a^2+6a+1}}{2a}$, și în acest caz, ecuația (1) are două soluții:

$$\frac{-a - 1 - \sqrt{5a^2 + 6a + 1}}{2a}, \quad \frac{a + 1 + \sqrt{5a^2 + 6a + 1}}{2a};$$

iar pentru $a \in (0, +\infty)$ soluția pozitivă este $x = \frac{-a-1+\sqrt{5a^2+6a+1}}{2a}$, și în acest caz, ecuația (1) are, de asemenea, două soluții:

$$\frac{-a - 1 + \sqrt{5a^2 + 6a + 1}}{2a}, \quad \frac{a + 1 - \sqrt{5a^2 + 6a + 1}}{2a}.$$

Analog, cazul $-\frac{a+1}{a} > 0$ este echivalent cu $(a + 1)a < 0$, adică $a \in (-1, 0)$, care, în condițiile p.5), se reduce la $a \in (-\frac{1}{5}, 0)$. În acest caz ecuația (2) are ambele soluții pozitive, iar ecuația (1) are patru soluții

$$\frac{-a - 1 - \sqrt{5a^2 + 6a + 1}}{2a}, \quad \frac{a + 1 + \sqrt{5a^2 + 6a + 1}}{2a},$$

$$\frac{-a - 1 + \sqrt{5a^2 + 6a + 1}}{2a}, \quad \frac{a + 1 - \sqrt{5a^2 + 6a + 1}}{2a}.$$

Răspuns:

1) Pentru $a \in (-\infty, -1)$ avem $S = \left\{ -\frac{a+1+\sqrt{5a^2+6a+1}}{2a}, \frac{a+1+\sqrt{5a^2+6a+1}}{2a} \right\}$.

2) Pentru $a = -1$ avem $S = \{0\}$.

3) Pentru $a \in \left(-1, -\frac{1}{5}\right)$ avem $S = \emptyset$.

4) Pentru $a = -\frac{1}{5}$ avem $S = \{-2, 2\}$.

5) Pentru $a \in \left(-\frac{1}{5}, 0\right)$ avem $S = \left\{ -\frac{a+1+\sqrt{5a^2+6a+1}}{2a}, \frac{a+1+\sqrt{5a^2+6a+1}}{2a}, -\frac{a+1-\sqrt{5a^2+6a+1}}{2a}, \frac{a+1-\sqrt{5a^2+6a+1}}{2a} \right\}$.

6) Pentru $a = 0$ avem $S = \{-1, 1\}$.

7) Pentru $a \in (0, +\infty)$ avem $S = \left\{ -\frac{a+1-\sqrt{5a^2+6a+1}}{2a}, \frac{a+1-\sqrt{5a^2+6a+1}}{2a} \right\}$.