

**OLIMPIADA REPUBLICANĂ LA MATEMATICĂ**  
**05 martie 2022, Clasa a VII – a**

**Soluții**

**7.1.** Mihai a desenat pe tablă câteva triunghiuri dreptunghice, astfel încât oricare două triunghiuri nu au puncte comune. În fiecare dintre aceste triunghiuri, Mihai a trasat următoarele linii importante (segmente): toate bisectoarele, toate medianele și înălțimea dusă pe ipotenuză. Numărând, câte linii importante a trasat în total în toate triunghiurile, Mihai a obținut numărul 44. Determinați câte triunghiuri dreptunghice isoscele a desenat Mihai pe tablă.

**Rezolvare:**

Triunghiurile dreptunghice pot fi scalene sau isoscele. Într-un triunghi dreptunghi scalen Mihai construiește exact 7 segmente importante distincte: 3 bisectoare, 3 mediane și o înălțimea. Într-un triunghi dreptunghi isoscel, Mihai construiește exact 5 segmente importante distincte, deoarece mediana, înălțimea și bisectoarea construite din vârful unghiului drept coincid. Menționăm, că nici un segment important dintr-un triunghi nu coincide cu vreun segment important în alt triunghi. Fie  $x$  – numărul de triunghiuri dreptunghice oarecare, iar  $y$  – numărul de triunghiuri dreptunghice isoscele desenate de Mihai. Astfel, obținem  $7x + 5y = 44$ , unde  $x, y \in \mathbb{N}$ . Cum  $7x \leq 44$  și  $x \in \mathbb{N}$  rezultă  $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

Pentru  $x = 0$  se obține  $y = \frac{44}{5} \notin \mathbb{N}$ . Pentru  $x = 1$  se obține  $y = \frac{37}{5} \notin \mathbb{N}$ . Pentru  $x = 2$  se obține  $y = 6$ . Pentru  $x = 3$  se obține  $y = \frac{23}{5} \notin \mathbb{N}$ . Pentru  $x = 4$  se obține  $y = \frac{16}{5} \notin \mathbb{N}$ . Pentru  $x = 5$  se obține  $y = \frac{9}{5} \notin \mathbb{N}$ . Pentru  $x = 6$  se obține  $y = \frac{2}{5} \notin \mathbb{N}$ . Cum unica soluție a ecuației  $7x + 5y = 44$ , unde  $x, y \in \mathbb{N}$  este  $x = 2$  și  $y = 6$ , rezultă că Mihai a desenat 6 triunghiuri dreptunghice isoscele.

**Răspuns:** Mihai a desenat 6 triunghiuri dreptunghice isoscele.

**7.2.** Fie triunghiul  $ABC$  cu unghiul obtuz  $ABC$ . Punctele  $D$  și  $E$  aparțin laturii  $AC$ , astfel încât  $AD \equiv DE \equiv EC$ , iar  $BE \perp AB$  și  $BD \perp BC$ . Determinați lungimea laturii  $BC$  știind că perimetrul triunghiului  $ABC$  este egal cu  $(12 + 8\sqrt{3})$  cm, iar  $\frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

**Rezolvare:**

Din  $\frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{3}$  considerăm  $AB = \sqrt{3}x$  iar  $AC = 3x$ . Cum  $AD \equiv DE \equiv EC$  și  $AC = 3x$ , rezultă  $AD = DE = EC = x$ .

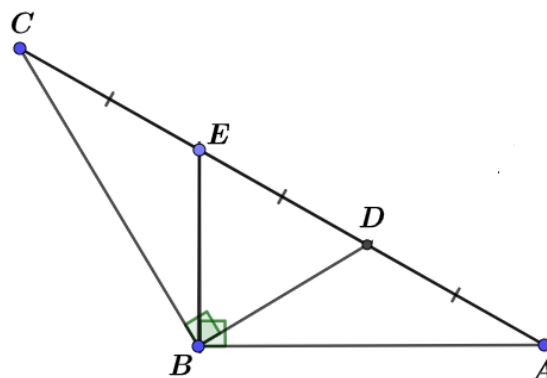
Considerăm triunghiul dreptunghi  $ABE$ , cu  $BE \perp AB$ . Deoarece  $AD = DE$ , rezultă că  $BD$  reprezintă mediana corespunzătoare ipotenuze. Astfel,  $BD = \frac{AE}{2} = x$ .

Considerăm triunghiul dreptunghi  $DBC$ , cu  $BD \perp BC$ . Deoarece  $DE = EC$ , rezultă că  $BE$  reprezintă mediana corespunzătoare ipotenuze. Astfel,  $BE = \frac{CD}{2} = x$ .

Considerăm triunghiurile dreptunghice  $ABE$  și  $DBC$ . Deoarece  $AE = 2x = CD$  și  $BD = x = BE$ , rezultă că  $\triangle ABE \equiv \triangle CBD$  conform criteriului ipotenuză-catetă. Astfel,  $AB \equiv BC$ . Deci  $BC = \sqrt{3}x$ .

Deoarece  $P_{\triangle ABC} = 12 + 8\sqrt{3}$ , obținem  $\sqrt{3}x + \sqrt{3}x + 3x = 12 + 8\sqrt{3}$ ,  $x(3 + 2\sqrt{3}) = 12 + 8\sqrt{3}$ ,  $x = \frac{12 + 8\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}} = 4$ . Cum  $BC = \sqrt{3}x$  și  $x = 4$ , obținem  $BC = 4\sqrt{3}$  cm.

**Răspuns:**  $BC = 4\sqrt{3}$  cm.



**7.3.** Numerele reale  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2022}$  verifică relațiile  $\frac{x_1}{1+x_1} = \frac{x_2}{2+x_2} = \frac{x_3}{3+x_3} = \dots = \frac{x_{2022}}{2022+x_{2022}}$  și

$\frac{1}{x_1} + \frac{2}{x_2} + \frac{3}{x_3} + \dots + \frac{2022}{x_{2022}} = 1011$ . Determinați valoarea expresiei  $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \dots + x_{2021} - x_{2022}$ .

**Rezolvare:**

**Metoda 1:**

Fie  $\frac{x_1}{1+x_1} = \frac{x_2}{2+x_2} = \frac{x_3}{3+x_3} = \dots = \frac{x_{2022}}{2022+x_{2022}} = k$ , atunci  $\frac{x_1}{1+x_1} = k$ ,  $\frac{x_2}{2+x_2} = k$ ,  $\frac{x_3}{3+x_3} = k$ , ...,  $\frac{x_{2022}}{2022+x_{2022}} = k$ . Din  $\frac{x_1}{1+x_1} = k$ , avem  $x_1 = k + kx_1$ ,  $x_1(1-k) = k$ ,  $x_1 = \frac{k}{1-k}$ . În mod analog, obținem  $x_2 = \frac{2k}{1-k}$ ,  $x_3 = \frac{3k}{1-k}$ , ...,  $x_{2022} = \frac{2022k}{1-k}$ . Cum  $\frac{1}{x_1} + \frac{2}{x_2} + \frac{3}{x_3} + \dots + \frac{2022}{x_{2022}} = 1011$ , obținem  $\frac{1}{\frac{k}{1-k}} + \frac{2}{\frac{2k}{1-k}} + \frac{3}{\frac{3k}{1-k}} + \dots + \frac{2022}{\frac{2022k}{1-k}} = 1011$ ,  $\frac{1-k}{k} + \frac{2(1-k)}{2k} + \frac{3(1-k)}{3k} + \dots + \frac{2022(1-k)}{2022k} = 1011$ ,  $\frac{1-k}{k} + \frac{1-k}{k} + \frac{1-k}{k} + \dots + \frac{1-k}{k} = 1011$ ,  $\frac{2022(1-k)}{k} = 1011$ ,  $2022(1-k) = 1011k$ ,  $2(1-k) = k$ ,  $2 - 2k = k$ ,  $k = \frac{2}{3}$ . Pentru  $k = \frac{2}{3}$  obținem  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 4$ ,  $x_3 = 6$ , ...,  $x_{2022} = 4044$ . Astfel valoarea expresiei  $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \dots + x_{2021} - x_{2022} = 2 - 4 + 6 - 8 + \dots + 4042 - 4044 = \underbrace{-2 - 2 - 2 - \dots - 2}_{1011 \text{ ori}} = -2022$ .

**Metoda 2:**

Din  $\frac{x_1}{1+x_1} = \frac{x_2}{2+x_2} = \frac{x_3}{3+x_3} = \dots = \frac{x_{2022}}{2022+x_{2022}}$  rezultă  $\frac{1}{1+\frac{1}{x_1}} = \frac{1}{1+\frac{2}{x_2}} = \frac{1}{1+\frac{3}{x_3}} = \dots = \frac{1}{1+\frac{2022}{x_{2022}}}$ . Conform proprietății șirurilor de rapoarte egale obținem  $\frac{1}{1+\frac{1}{x_1}} = \frac{1}{1+\frac{2}{x_2}} = \frac{1}{1+\frac{3}{x_3}} = \dots = \frac{1}{1+\frac{2022}{x_{2022}}} = \frac{1+1+1+\dots+1}{1+\frac{1}{x_1}+1+\frac{2}{x_2}+1+\frac{3}{x_3}+\dots+1+\frac{2022}{x_{2022}}} = \frac{2022}{2022+1011} = \frac{2022}{3033} = \frac{2}{3}$ . Astfel,  $\frac{x_1}{1+x_1} = \frac{x_2}{2+x_2} = \frac{x_3}{3+x_3} = \dots = \frac{2}{3}$ . Din  $\frac{x_1}{1+x_1} = \frac{2}{3}$ , avem  $3x_1 = 2 + 2x_1$ ,  $x_1 = 2$ . În mod analog, obținem  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 4$ ,  $x_3 = 6$ , ...,  $x_{2022} = 4044$ . Astfel valoarea expresiei  $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \dots + x_{2021} - x_{2022} = 2 - 4 + 6 - 8 + \dots + 4042 - 4044 = \underbrace{-2 - 2 - 2 - \dots - 2}_{1011 \text{ ori}} = -2022$ .

**Metoda 3:**

Din  $\frac{x_1}{1+x_1} = \frac{x_2}{2+x_2} = \frac{x_3}{3+x_3} = \dots = \frac{x_{2022}}{2022+x_{2022}}$  rezultă  $\frac{1}{1+\frac{1}{x_1}} = \frac{1}{1+\frac{2}{x_2}} = \frac{1}{1+\frac{3}{x_3}} = \dots = \frac{1}{1+\frac{2022}{x_{2022}}}$ . Conform proprietății șirurilor de rapoarte egale obținem  $\frac{1}{1+\frac{1}{x_1}} = \frac{1}{1+\frac{2}{x_2}} = \frac{1}{1+\frac{3}{x_3}} = \dots = \frac{1}{1+\frac{2022}{x_{2022}}} = \frac{1+1+1+\dots+1}{1+\frac{1}{x_1}+1+\frac{2}{x_2}+1+\frac{3}{x_3}+\dots+1+\frac{2022}{x_{2022}}} = \frac{2022}{2022+1011} = \frac{2022}{3033} = \frac{2}{3}$ . Notăm  $S = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \dots + x_{2021} - x_{2022}$ . Din  $\frac{x_1}{1+x_1} = \frac{x_2}{2+x_2} = \frac{x_3}{3+x_3} = \dots = \frac{x_{2022}}{2022+x_{2022}}$  utilizând proprietățile șirurilor de rapoarte egale obținem

$$\frac{2}{3} = \frac{x_1}{1+x_1} = \frac{x_2}{2+x_2} = \frac{x_3}{3+x_3} = \dots = \frac{x_{2022}}{2022+x_{2022}} =$$

$$= \frac{x_1 - x_2 + x_3 - \dots - x_{2022}}{(1+x_1) - (2+x_2) + (3+x_3) - \dots - (2022+x_{2022})} =$$

$$\frac{S}{(1-2)+(3-4)+\dots+(2021-2022)+S} = \frac{S}{S-1011}. \text{Astfel avem } \frac{S}{S-1011} = \frac{2}{3}, \text{ de unde rezultă } S = -2022.$$

**Răspuns:** -2022

**7.4.** Determinați toate numerele naturale de patru cifre  $\overline{abcd}$ , astfel încât  $\overline{abcd} = \overline{ab} + (\overline{cd})^2$ . (Aici prin  $\overline{pqrs}$  și  $\overline{pq}$  se notează numerele scrise cu cifrele  $p, q, r, s$  și respectiv  $p, q$ , unde  $p \neq 0$ .)

**Rezolvare:**

Din  $\overline{abcd} = \overline{ab} + (\overline{cd})^2$ , obținem  $100 \cdot \overline{ab} + \overline{cd} = \overline{ab} + (\overline{cd})^2$ ,  $99 \cdot \overline{ab} = (\overline{cd})^2 - \overline{cd}$ ,  $99 \cdot \overline{ab} = \overline{cd} \cdot (\overline{cd} - 1)$ . Din ultima egalitate rezultă că  $\overline{cd} \cdot (\overline{cd} - 1) : 11$  și  $\overline{cd} \cdot (\overline{cd} - 1) : 9$ . Considerăm  $\overline{cd} \cdot (\overline{cd} - 1) : 11$ . Cum numerele  $\overline{cd}$  și  $\overline{cd} - 1$  sunt prime între ele, obținem  $\overline{cd} : 11$  sau  $(\overline{cd} - 1) : 11$ .

Dacă  $\overline{cd} : 11$  rezultă că  $\overline{cd} \in \{11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99\}$ .

Pentru  $\overline{cd} = 11$  obținem  $99 \cdot \overline{ab} = 11 \cdot 10$ ,  $\overline{ab} = \frac{10}{9}$  – imposibil. Pentru  $\overline{cd} = 22$  obținem  $99 \cdot \overline{ab} = 22 \cdot 21$ ,  $\overline{ab} = \frac{14}{3}$  – imposibil. Pentru  $\overline{cd} = 33$  obținem  $99 \cdot \overline{ab} = 33 \cdot 32$ ,  $\overline{ab} = \frac{32}{3}$  – imposibil. Pentru  $\overline{cd} = 44$  obținem  $99 \cdot \overline{ab} = 44 \cdot 43$ ,  $\overline{ab} = \frac{172}{9}$  – imposibil. Pentru  $\overline{cd} = 55$  obținem  $99 \cdot \overline{ab} = 55 \cdot 54$ ,  $\overline{ab} = 30$ . Pentru  $\overline{cd} = 66$  obținem  $99 \cdot \overline{ab} = 66 \cdot 65$ ,  $\overline{ab} = \frac{130}{3}$  – imposibil. Pentru  $\overline{cd} = 77$  obținem  $99 \cdot \overline{ab} = 77 \cdot 76$ ,  $\overline{ab} = \frac{532}{9}$  – imposibil. Pentru  $\overline{cd} = 88$  obținem  $99 \cdot \overline{ab} = 88 \cdot 87$ ,  $\overline{ab} = \frac{232}{3}$  – imposibil. Pentru  $\overline{cd} = 99$  obținem  $99 \cdot \overline{ab} = 99 \cdot 98$ ,  $\overline{ab} = 98$ .

Dacă  $(\overline{cd} - 1) : 11$  rezultă  $\overline{cd} \in \{12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89\}$ .

Pentru  $\overline{cd} = 12$  obținem  $99 \cdot \overline{ab} = 12 \cdot 11$ ,  $\overline{ab} = \frac{4}{3}$  – imposibil. Pentru  $\overline{cd} = 23$  obținem  $99 \cdot \overline{ab} = 23 \cdot 22$ ,  $\overline{ab} = \frac{46}{3}$  – imposibil. Pentru  $\overline{cd} = 34$  obținem  $99 \cdot \overline{ab} = 34 \cdot 33$ ,  $\overline{ab} = \frac{34}{3}$  – imposibil. Pentru  $\overline{cd} = 45$  obținem  $99 \cdot \overline{ab} = 45 \cdot 44$ ,  $\overline{ab} = 20$ . Pentru  $\overline{cd} = 56$  obținem  $99 \cdot \overline{ab} = 56 \cdot 55$ ,  $\overline{ab} = \frac{280}{9}$  – imposibil. Pentru  $\overline{cd} = 67$  obținem  $99 \cdot \overline{ab} = 67 \cdot 66$ ,  $\overline{ab} = \frac{134}{3}$  – imposibil. Pentru  $\overline{cd} = 78$  obținem  $99 \cdot \overline{ab} = 78 \cdot 77$ ,  $\overline{ab} = \frac{182}{3}$  – imposibil. Pentru  $\overline{cd} = 89$  obținem  $99 \cdot \overline{ab} = 89 \cdot 88$ ,  $\overline{ab} = \frac{712}{9}$  – imposibil

Astfel obținem  $\overline{abcd} \in \{2045, 3055, 9899\}$ .

**Răspuns:**  $\overline{abcd} \in \{2045, 3055, 9899\}$

**7.5.** Demonstrați că pentru orice număr natural  $n$ , numărul  $m = n^4 + 41n^2 + 443$ , nu poate fi reprezentat ca suma a două numere prime.

**Demonstrație**

Presupunem că există două numere prime  $p$  și  $q$ , astfel încât  $n^4 + 41n^2 + 443 = p + q$ . Deoarece  $n^4 + 41n^2 + 443 = n^2(n^2 + 41) + 443$  și numerele  $n^2$  și  $n^2 + 41$  au parități diferite, rezultă că numărul  $n^2(n^2 + 41)$  este par, iar numărul  $n^4 + 41n^2 + 443$  este impar. Aceasta implică că  $p + q$  este un număr impar. Astfel numerele  $p$  și  $q$  au parități diferite. Cum  $p$  și  $q$  sunt numere prime, rezultă că unul din ele este egal cu 2. Fie  $p = 2$ . Pentru  $p = 2$ , relația  $n^4 + 41n^2 + 443 = p + q$  capătă forma  $n^4 + 41n^2 + 441 = q$ . Observăm că  $n^4 + 41n^2 + 441 = n^4 + 42n^2 + 441 - n^2 = (n^2 + 21)^2 - n^2 = (n^2 + 21 - n)(n^2 + 21 + n)$ . Obținem  $(n^2 + 21 - n)(n^2 + 21 + n) = q$ . Deoarece  $n^2 + 21 + n \geq 21$  și  $n^2 + 21 - n \geq 21$  și din faptul că  $(n^2 + 21 - n)(n^2 + 21 + n) = q$  rezultă că numărul  $q$  reprezintă produsul a două numere naturale fiecare din ele diferite de 1. Ceea ce este contradicție cu faptul că  $q$  este numărul prim.

Astfel nu există numerele prime  $p$  și  $q$ , astfel încât  $n^4 + 41n^2 + 443 = p + q$ .