МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА РЕСПУБЛИКИ МОЛДОВА
05 марта 2022, VII – й класс

СХЕМА ОЦЕНИВАНИЯ

7.1. Михаил начертил на доске несколько прямоугольных треугольников такие, что любые два треугольни имеют общих точек. В каждом из этих треугольников Михаил построил следующие замечательные ли (отрезки): все биссектрисы, все медианы и высоту, проведенную к гипотенузе. Посчитав, сколько замечательных линий он построил всего во всех треугольниках, Михаил получил число 44. Определит сколько равнобедренных прямоугольных треугольников начертил на доске Михаил.

Этапы решения со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	В разностороннем прямоугольном треугольнике Михаил может построить 7 замечательных линий.	1 балл
2.	В равнобедренном прямоугольном треугольнике Михаил может построить 5 замечательных линий.	1 балл
3.	Получение уравнения $7x+5y=44$, где x – количество разносторонних прямоугольных треугольников, а y – количество равнобедренных прямоугольных треугольников.	2 балла
4.	Обоснование того, что единственным решением уравнения $7x+5y=44$ на множестве натуральных чисел, является пара $x=2, y=6$.	2 балла
5.	Указание того, что Михаил начертил 6 равнобедренных прямоугольных треугольников.	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов

Примечание: Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.

7.2. Задан треугольник ABC, с тупым углом ABC. Точки D и E принадлежат стороне AC, так, что $AD \equiv DE \equiv EC$, а $BE \perp AB$ и $BD \perp BC$. Определите длину стороны BC, если известно, что периметр треугольника ABC равен $(12+8\sqrt{3})$ см, а $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Этапы решения со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Правильное выполнение чертежа.	1 балл
2.	Получение отношения $BD=\dfrac{AE}{2}$.	1 балл
3.	Получение отношения $BE=\dfrac{CD}{2}$.	1 балл
4.	Получение отношения $AB \equiv BC$.	2 балла
5.	Получение уравнения $\sqrt{3}x+\sqrt{3}x+3x=12+8\sqrt{3}$, где $x=\frac{AB}{\sqrt{3}}$ (или получение уравнения, равносильного данному).	1 балл
6.	Получение $BC=4\sqrt{3}$ см.	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов

Примечание: Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.

7. 3. Действительные числа $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2022}$ удовлетворяют условиям
$$\frac{x_1}{1+x_1}=\frac{x_2}{2+x_2}=\frac{x_3}{3+x_3}=\cdots=\frac{x_{2022}}{2022+x_{2022}} \text{ и } \frac{1}{x_1}+\frac{2}{x_2}+\frac{3}{x_3}+\cdots+\frac{2022}{x_{2022}}=1011.$$
Определите значение выражения $x_1-x_2+x_3-x_4+\cdots+x_{2021}-x_{2022}$.

Этапы решения со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
	Первый метод	
1.	Получение $x_1=\frac{k}{1-k}, x_2=\frac{2k}{1-k}, \ldots, x_{2022}=\frac{2022k}{1-k}$, где $k\in\mathbb{R}$.	2 балла
2.	Получение $k=\frac{2}{3}$.	2 балла
3.	Получение $x_1=2,\ x_2=4,\ x_3=6,\ \ldots,\ x_{2022}=4044$	2 балла
4.	Получение значения выражения $x_1-x_2+x_3-x_4+\cdots+x_{2021}-x_{2022}=-2022$	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов
	Второй метод	
1.	Написание ряда равных отношений $\frac{x_1}{1+x_1}=\frac{x_2}{2+x_2}=\frac{x_3}{3+x_3}=\cdots=\frac{x_{2022}}{2022+x_{2022}}$ в виде $\frac{1}{1+\frac{1}{x_1}}=\frac{1}{1+\frac{2}{x_2}}=\frac{1}{1+\frac{3}{x_3}}=\cdots=\frac{1}{1+\frac{2022}{x_{2022}}}$.	2 балла
2.	Использование свойства последовательности равных отношений и получение $\frac{1}{1+\frac{1}{x_1}}=\frac{1}{1+\frac{2}{x_2}}=\frac{1}{1+\frac{3}{x_3}}=\cdots=\frac{1}{1+\frac{2022}{x_{2022}}}=\frac{2}{3}$	2 балла
3.	Получение $x_1=2,\ x_2=4,\ x_3=6,\ \ldots,\ x_{2022}=4044$	2 балла
4.	Получение значения выражения $x_1-x_2+x_3-x_4+\cdots+x_{2021}-x_{2022}=-2022$	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов
	Третий метод	
1.	Получение $\frac{x_1}{1+x_1}=\frac{x_2}{2+x_2}=\frac{x_3}{3+x_3}=\cdots=\frac{x_{2022}}{2022+x_{2022}}=\frac{2}{3}$	4 балла
2.	Использование свойства последовательности равных отношений и получение $$\frac{x_1}{1+x_1}=\frac{x_2}{2+x_2}=\frac{x_3}{3+x_3}=\cdots=\frac{x_{2022}}{2022+x_{2022}}=$$ $$=\frac{x_1-x_2+x_3-\cdots-x_{2022}}{(1+x_1)-(2+x_2)+(3+x_3)-\cdots-(2022+x_{2022})}$$	2 балла
3.	Получение значения выражения $x_1-x_2+x_3-x_4+\cdots+x_{2021}-x_{2022}=-2022$	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов

Примечание: Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.

7.4. Найдите все четырехзначные натуральные числа $\overline{abcd}$, такие, что $\overline{abcd} = \overline{ab} + \left(\overline{cd}\right)^2$. (Здесь через $\overline{pq}$ обозначаются числа, записанные цифрами p, q, r, s и соответственно p, q, где $p \neq 0$.).		
Этапы решения со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Запись выражения $\overline{abcd} = \overline{ab} + \left(\overline{cd}\right)^2$ в виде $99 \cdot \overline{ab} = \overline{cd} \cdot \left(\overline{cd} - 1\right)$ *Примечание*: • *За запись выражения* $\overline{abcd} = \overline{ab} + \left(\overline{cd}\right)^2$ *в виде* $99 \cdot \overline{ab} = \left(\overline{cd}\right)^2 - \overline{cd}$ *начисляется 1 балл.*	2 балла
2.	Обоснование того, что $\overline{cd} \vdots 11$ или $\left(\overline{cd} - 1\right) \vdots 11$	1 балл
3.	Рассмотрение всех случаев $\overline{cd} \in \{11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99\}$ и получение $\overline{abcd} \in \{3055, 9899\}$ • *Примечание*: • *За получение одного или обоих случаев* $\overline{abcd} \in \{3055, 9899\}$, *но без полного рассмотрения случаев* $\overline{cd} \in \{11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99\}$ *начисляется 1 балл.*	2 балла
4.	Рассмотрение всех случаев $\overline{cd} \in \{12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89\}$ и получение $\overline{abcd} = 2045$ • *Примечание*: • *За получение* $\overline{abcd} = 2045$, *но без полного рассмотрения случаев* $\overline{cd} \in \{12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89\}$ *начисляется 1 балл.*	2 балла
	Общее количество баллов	7 баллов

Примечание: Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.

7.5. Докажите, что для любого натурального числа n, число $m = n^4 + 41n^2 + 443$ нельзя представить в виде суммы двух простых чисел.		
Этапы решения со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Обоснование, что число $n^4 + 41n^2 + 443$ является нечётным.	2 балла
2.	Вывод, что если $n^4 + 41n^2 + 443 = p + q$ (где p и q – простые числа), то одно из них равно 2.	1 балл
3.	Запись $n^4 + 41n^2 + 441$ в виде $(n^2 + 21 - n)(n^2 + 21 + n)$	2 балла
4.	Обоснование, что числа вида $(n^2 + 21 - n)(n^2 + 21 + n)$ не могут быть простыми.	2 балла
	Общее количество баллов	7 баллов

Примечание: Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.