

OLIMPIADA REPUBLICANĂ LA MATEMATICĂ

05 martie 2022, Clasa a VII – a

BAREM DE EVALUARE

7.1. Mihai a desenat pe tablă câteva triunghiuri dreptunghice, astfel încât oricare două triunghiuri nu au puncte comune. În fiecare dintre aceste triunghiuri, Mihai a trasat următoarele linii importante (segmente): toate bisectoarele, toate medianele și înălțimea dusă pe ipotenuză. Numărând, câte linii importante a trasat în total în toate triunghiurile, Mihai a obținut numărul 44. Determinați câte triunghiuri dreptunghice isoscele a desenat Mihai pe tablă.

Etapile rezolvării și baremul de evaluare

Pasul	Etapile rezolvării	Numărul de puncte
1.	Indicarea faptului că într-un triunghi dreptunghi oarecare Mihai construiește 7 linii importante.	1 punct
2.	Indicarea faptului că într-un triunghi dreptunghi isoscel Mihai construiește 5 linii importante.	1 punct
3.	Obținerea ecuației $7x + 5y = 44$, unde x – numărul triunghiurilor dreptunghice oarecare, iar y – numărul triunghiurilor dreptunghice isoscele.	2 puncte
4.	Argumentarea că unica soluție a ecuației $7x + 5y = 44$ în mulțimea numerelor naturale este $x = 2$ și $y = 6$.	2 puncte
5.	Obținerea că Mihai a desenat 6 triunghiuri dreptunghice isoscele.	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

Remarcă: Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.

7.2. Fie triunghiul ABC cu unghiul obtuz ABC . Punctele D și E aparțin laturii AC , astfel încât $AD \equiv DE \equiv EC$, iar $BE \perp AB$ și $BD \perp BC$. Determinați lungimea laturii BC știind că perimetrul triunghiului ABC este egal cu $(12 + 8\sqrt{3})$ cm, iar $\frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Etapile rezolvării și baremul de evaluare

Pasul	Etapile rezolvării	Numărul de puncte
1.	Efectuarea desenului corect.	1 punct
2.	Obținerea relației: $BD = \frac{AE}{2}$.	1 punct
3.	Obținerea relației: $BE = \frac{CD}{2}$.	1 punct
4.	Obținerea relației $AB \equiv BC$.	2 puncte
5.	Obținerea ecuației $\sqrt{3}x + \sqrt{3}x + 3x = 12 + 8\sqrt{3}$, unde $x = \frac{AB}{\sqrt{3}}$ (sau obținerea unei ecuații echivalente cu ecuația dată).	1 punct
6.	Obținerea $BC = 4\sqrt{3}$ cm.	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

Remarcă: Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.

7.3. Numerele reale $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2022}$ verifică relațiile $\frac{x_1}{1+x_1} = \frac{x_2}{2+x_2} = \frac{x_3}{3+x_3} = \dots = \frac{x_{2022}}{2022+x_{2022}}$ și $\frac{1}{x_1} + \frac{2}{x_2} + \frac{3}{x_3} + \dots + \frac{2022}{x_{2022}} = 1011$. Determinați valoarea expresiei $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \dots + x_{2021} - x_{2022}$.

Etapele rezolvării și baremul de evaluare

Pasul	Etapele rezolvării	Numărul de puncte
Metoda 1		
1.	Obținerea $x_1 = \frac{k}{1-k}, x_2 = \frac{2k}{1-k}, \dots, x_{2022} = \frac{2022k}{1-k}$, unde $k \in \mathbb{R}$.	2 puncte
2.	Obținerea $k = \frac{2}{3}$.	2 puncte
3.	Obținerea $x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = 6, \dots, x_{2022} = 4044$	2 puncte
4.	Obținerea valorii expresiei $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \dots + x_{2021} - x_{2022} = -2022$	1 punct
Punctaj total		7 puncte
Metoda 2		
1.	Scrierea șirurilor de rapoarte egale $\frac{x_1}{1+x_1} = \frac{x_2}{2+x_2} = \frac{x_3}{3+x_3} = \dots = \frac{x_{2022}}{2022+x_{2022}}$ în forma $\frac{1}{1+\frac{1}{x_1}} = \frac{1}{1+\frac{2}{x_2}} = \frac{1}{1+\frac{3}{x_3}} = \dots = \frac{1}{1+\frac{2022}{x_{2022}}}$.	2 puncte
2.	Utilizarea proprietății șirurilor de rapoarte egale și obținerea $\frac{1}{1+\frac{1}{x_1}} = \frac{1}{1+\frac{2}{x_2}} = \frac{1}{1+\frac{3}{x_3}} = \dots = \frac{1}{1+\frac{2022}{x_{2022}}} = \frac{2}{3}$	2 puncte
3.	Obținerea $x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = 6, \dots, x_{2022} = 4044$	2 puncte
4.	Obținerea valorii expresiei $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \dots + x_{2021} - x_{2022} = -2022$	1 punct
Punctaj total		7 puncte
Metoda 3		
1.	Obținerea $\frac{x_1}{1+x_1} = \frac{x_2}{2+x_2} = \frac{x_3}{3+x_3} = \dots = \frac{x_{2022}}{2022+x_{2022}} = \frac{2}{3}$	4 puncte
2.	Utilizarea proprietăților șirurilor de rapoarte egale și obținerea $\frac{x_1}{1+x_1} = \frac{x_2}{2+x_2} = \frac{x_3}{3+x_3} = \dots = \frac{x_{2022}}{2022+x_{2022}} =$ $= \frac{x_1 - x_2 + x_3 - \dots - x_{2022}}{(1+x_1) - (2+x_2) + (3+x_3) - \dots - (2022+x_{2022})}$	2 puncte
3.	Obținerea valorii expresiei $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \dots + x_{2021} - x_{2022} = -2022$	1 punct
Punctaj total		7 puncte

Remarcă: Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.

7.4. Determinați toate numerele naturale de patru cifre \overline{abcd} , astfel încât $\overline{abcd} = \overline{ab} + (\overline{cd})^2$. (Aici prin \overline{pqrs} și \overline{pq} se notează numerele scrise cu cifrele p, q, r, s și respectiv p, q , unde $p \neq 0$).

Etapele rezolvării și baremul de evaluare

Pasul	Etapele rezolvării	Numărul de puncte
1.	<p>Scrierea expresiei $\overline{abcd} = \overline{ab} + (\overline{cd})^2$ în forma $99 \cdot \overline{ab} = \overline{cd} \cdot (\overline{cd} - 1)$</p> <p><u>Remarcă:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> Pentru scrierea expresiei $\overline{abcd} = \overline{ab} + (\overline{cd})^2$ în forma $99 \cdot \overline{ab} = (\overline{cd})^2 - \overline{cd}$ se acordă 1 punct. 	2 puncte
2.	Argumentarea că $\overline{cd} : 11$ sau $(\overline{cd} - 1) : 11$	1 punct
3.	<p>Cercetarea tuturor cazurilor $\overline{cd} \in \{11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99\}$ și obținerea $\overline{abcd} \in \{3055, 9899\}$</p> <p><u>Remarcă:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> Pentru obținerea a unuia sau a ambelor numere $\overline{abcd} \in \{3055, 9899\}$ cu cercetarea nu a tuturor cazurilor $\overline{cd} \in \{11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99\}$ se acordă 1 punct. 	2 puncte
4.	<p>Cercetarea tuturor cazurilor $\overline{cd} \in \{12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89\}$ și obținerea $\overline{abcd} = 2045$</p> <p><u>Remarcă:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> Pentru obținerea $\overline{abcd} = 2045$ cu cercetarea nu a tuturor cazurilor $\overline{cd} \in \{12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89\}$ se acordă 1 punct. 	2 puncte
	Punctaj total	7 puncte

Remarcă: Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.

7.5. Demonstrați că pentru orice număr natural n , numărul $m = n^4 + 41n^2 + 443$, nu poate fi reprezentat ca suma a două numere prime.

Etapele rezolvării și baremul de evaluare

Pasul	Etapele rezolvării	Numărul de puncte
1.	Argumentarea că numărul $n^4 + 41n^2 + 443$ este impar.	2 puncte
2.	Deducerea că dacă $n^4 + 41n^2 + 443 = p + q$, unde p și q sunt numere prime, atunci unul din aceste numere prime este egal cu 2.	1 punct
3.	Reprezentarea $n^4 + 41n^2 + 443$ sub forma $(n^2 + 21 - n)(n^2 + 21 + n)$	2 puncte
4.	Argumentarea că numărul de forma $(n^2 + 21 - n)(n^2 + 21 + n)$ nu poate fi număr prim.	2 puncte
	Punctaj total	7 puncte

Remarcă: Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.