

**OLIMPIADA REPUBLICANĂ LA MATEMATICĂ**  
**5 martie 2022, Clasa a XII-a**

12.1. Fie funcția

$$f: \left[ \pi; \frac{3\pi}{2} \right] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{3 \cos(2x) - 4 \sin(2x) + \cos x - 3 \sin x}{(\sin x + 3 \cos x)^{2022}}.$$

Determinați primitiva  $F: \left[ \pi; \frac{3\pi}{2} \right] \rightarrow \mathbb{R}$  a funcției  $f$ , pentru care  $F\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{1}{2021}$ .

12.2. Fie piramida  $VABC$ , în care  $AB = 7$  cm,  $AC = 5$  cm,  $BC = 8$  cm,  $VB = 6$  cm, iar unghiurile diedre de la baza  $ABC$  sunt congruente. Să se determine distanța de la punctul  $P$  la muchia  $VA$ , unde  $AP$  este bisectoare în triunghiul  $ABC$ .

12.3. Fie numărul complex  $z$ , pentru care  $z^{2020}|z| + \bar{z}i = 0$ . Determinați mulțimea valorilor expresiei

$$E = z^{2020} - z^{2019}i + \dots + (-1)^k z^{2020-k} i^k + \dots + zi + 1.$$

12.4. Fie matricea  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ . Determinați  $A^{2021}$ .

12.5. Fie

$$I_n = \int_{\frac{1}{n}}^n \frac{dx}{(x+1)(\ln^{2n} x + 1)}, \quad n \geq 2.$$

Calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ .

**Timp de lucru: 240 minute.**

**Rezolvarea corectă a fiecărei probleme se apreciază cu 7 puncte.      MULT SUCCES !**

**OLIMPIADA REPUBLICANĂ LA MATEMATICĂ**  
**5 martie 2022, Clasa a XII-a**

12.1. Fie funcția

$$f: \left[ \pi; \frac{3\pi}{2} \right] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{3 \cos(2x) - 4 \sin(2x) + \cos x - 3 \sin x}{(\sin x + 3 \cos x)^{2022}}.$$

Determinați primitiva  $F: \left[ \pi; \frac{3\pi}{2} \right] \rightarrow \mathbb{R}$  a funcției  $f$ , pentru care  $F\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{1}{2021}$ .

12.2. Fie piramida  $VABC$ , în care  $AB = 7$  cm,  $AC = 5$  cm,  $BC = 8$  cm,  $VB = 6$  cm, iar unghiurile diedre de la baza  $ABC$  sunt congruente. Să se determine distanța de la punctul  $P$  la muchia  $VA$ , unde  $AP$  este bisectoare în triunghiul  $ABC$ .

12.3. Fie numărul complex  $z$ , pentru care  $z^{2020}|z| + \bar{z}i = 0$ . Determinați mulțimea valorilor expresiei

$$E = z^{2020} - z^{2019}i + \dots + (-1)^k z^{2020-k} i^k + \dots + zi + 1.$$

12.4. Fie matricea  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ . Determinați  $A^{2021}$ .

12.5. Fie

$$I_n = \int_{\frac{1}{n}}^n \frac{dx}{(x+1)(\ln^{2n} x + 1)}, \quad n \geq 2.$$

Calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ .

**Timp de lucru: 240 minute.**

**Rezolvarea corectă a fiecărei probleme se apreciază cu 7 puncte.      MULT SUCCES !**