Olimpiada Republicană la Matematică

5 martie 2022, Clasa a XII–a

Soluții

12.1. Fie funcția $f: \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{3\cos(2x) - 4\sin(2x) + \cos x - 3\sin x}{(\sin x + 3\cos x)^{2022}}$. Determinați primitiva $F: \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ a funcției f, pentru care $F\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{1}{2021}$.

Soluție.

$$\int \frac{3\cos(2x) - 4\sin(2x) + \cos x - 3\sin x}{(\sin x + 3\cos x)^{2022}} dx =$$

$$= \int \frac{3\cos^2 x - 3\sin^2 x - 8\sin x\cos x + \cos x - 3\sin x}{(\sin x + 3\cos x)^{2022}} dx =$$

$$= \int \frac{(\sin x + 3\cos x)(\cos x - 3\sin x) + \cos x - 3\sin x}{(\sin x + 3\cos x)^{2022}} dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} t = \sin x + 3\cos x \\ dt = (\cos x - 3\sin x)dx \end{matrix} \right| = \int \frac{t+1}{t^{2022}} dt = -\frac{t^{-2020}}{2020} - \frac{t^{-2021}}{2021} + C =$$

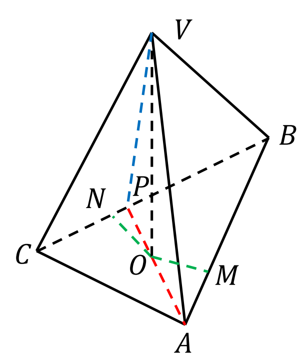
$$= -\frac{1}{2020(\sin x + 3\cos x)^{2020}} - \frac{1}{2021(\sin x + 3\cos x)^{2021}} + C.$$

$$F\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{1}{2021} \Longrightarrow -\frac{1}{2020} + \frac{1}{2021} + C = \frac{1}{2021} \Longrightarrow C = \frac{1}{2020}.$$

Astfel, am obținut $F(x) = -\frac{1}{2020(\sin x + 3\cos x)^{2020}} - \frac{1}{2021(\sin x + 3\cos x)^{2021}} + \frac{1}{2020}$.

12.2. Fie piramida $VABC$, în care $AB = 7$ cm, $AC = 5$ cm, $BC = 8$ cm, $VB = 6$ cm, iar unghiurile diedre de la baza ABC sunt congruente. Să se determine distanța de la punctul P la muchia VA, unde AP este bisectoare în triunghiul ABC.

Soluție. Proiecția vârfului V pe baza ABC este centru O al cercului înscris în triunghiul ABC. Fie M și N punctele de tangență ale laturilor AB și BC, respectiv, cu cercul înscris în triunghiul ABC.
Utilizând formula lui Heron, calculăm $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = 10\sqrt{3}$ cm^2.
Atunci $OM = ON = \sqrt{3}$ cm.
Aplicând teorema despre tangentele duse dintr-un punct exterior cercului, obținem $BN = 5$ cm, $AM = 2$ cm.
Atunci $OB = 2\sqrt{7}$ cm, $AO = \sqrt{7}$ cm.
Calculăm $VO = 2\sqrt{2}$ cm și $VA = \sqrt{15}$ cm.



Fie AP – bisectoarea unghiului A. Conform teoremei bisectoarei obținem $PB = \frac{14}{3}$ cm. Atunci $NP = \frac{1}{3}$ cm, $OP = \frac{2\sqrt{7}}{3}$ cm,
$AP = \frac{5\sqrt{7}}{3}$ cm și $VP = \frac{10}{3}$ cm. Fie d – distanța de la punctul P la muchia VA.
Atunci $\mathcal{A}_{APV} = \frac{1}{2}AP \cdot OV = \frac{1}{2}VA \cdot d$ implică $d = \frac{2\sqrt{210}}{9}$ cm.

12.3. Fie numărul complex z, pentru care $z^{2020}|z| + \overline{z}\,i = 0$. Determinați mulțimea valorilor expresiei

$$E = z^{2020} - z^{2019}i + \cdots + (-1)^k z^{2020-k} i^k + \cdots + zi + 1.$$

Soluție 1. $z^{2020}|z| + \overline{z}\,i = 0 \Leftrightarrow z^{2021}|z| + z\overline{z}\,i = 0 \Leftrightarrow z^{2021}|z| + |z|^2 i = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow z^{2021}|z| = -|z|^2 i \Rightarrow |z|^{2021} = |z| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |z| = 0 \\ |z| = 1. \end{array}\right.$$

Pentru $|z| = 0$, $E = z^{2020} - z^{2019}i + \cdots + (-1)^k z^{2020-k} i^k + \cdots + zi + 1 = 1$.

Pentru $|z| = 1$, din egalitatea $z^{2021}|z| + |z|^2 i = 0$ obținem $z^{2021} = -i$.

În acest caz pentru $zi \neq 1$

$$E = z^{2020}\left(1 + \frac{1}{zi} + \left(\frac{1}{zi}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{zi}\right)^k + \left(\frac{1}{zi}\right)^{2020}\right) = z^{2020}\frac{1 - \left(\frac{1}{zi}\right)^{2021}}{1 - \frac{1}{zi}} =$$

$$= z^{2020}\frac{(zi)^{2021} - 1}{(zi)^{2021}} \cdot \frac{zi}{zi - 1} = \frac{z^{2021}i - 1}{zi - 1} = \frac{-i^2 - 1}{zi - 1} = 0.$$

Dacă, însă $zi = 1 \Leftrightarrow z = -i$, atunci $E = (-i)^{2020} + (-i)^{2020} + \cdots + (-i)^{2020} + 1 = 2021$.

În concluzie, $E = z^{2020} - z^{2019}i + \cdots + (-1)^k z^{2020-k} i^k + \cdots + zi + 1 = \begin{cases} 1, & z = 0 \\ 0, & z \neq -i,\ z \neq 0 \\ 2021, & z = -i. \end{cases}$

Soluție 2. $z^{2020}|z| + \overline{z}\,i = 0 \Leftrightarrow z^{2021}|z| + z\overline{z}\,i = 0 \Leftrightarrow z^{2021}|z| + |z|^2 i = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow z^{2021}|z| = -|z|^2 i \Rightarrow |z|^{2021} = |z| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |z| = 0 \\ |z| = 1. \end{array}\right.$$

Pentru $|z| = 0$, $E = z^{2020} - z^{2019}i + \cdots + (-1)^k z^{2020-k} i^k + \cdots + zi + 1 = 1$.

Pentru $|z| = 1$, din egalitatea $z^{2021}|z| + |z|^2 i = 0$ obținem $z^{2021} = -i$.

Observăm că

$$z^{2021} + i^{2021} = (z^{2020} - z^{2019}i + \cdots + (-1)^k z^{2020-k} i^k + \cdots + zi + 1)(z + i) = E(z + i).$$

Atunci, pentru $z \neq -i, E = \frac{z^{2021}+i^{2021}}{z+i} = \frac{z^{2021}+i}{z+i} = 0$.

Dacă, însă $z = -i$, atunci $E = (-i)^{2020} + (-i)^{2020} + \cdots + (-i)^{2020} + 1 = 2021$.

În concluzie, $E = z^{2020} - z^{2019}i + \cdots + (-1)^k z^{2020-k} i^k + \cdots + zi + 1 = \begin{cases} 1, \ z = 0 \\ 0, \ z \neq -i, \ \ z \neq 0 \\ 2021, z = -i. \end{cases}$

12.4. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Determinați A^{2021}.

Soluție 1. Observăm că $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 13 & -14 \\ -14 & 13 \end{pmatrix}$.

Utilizând metoda inducției matematice, demonstrăm că $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix}$.

Într-adevăr, presupunem că $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix}$. Atunci

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n - 2b_n & b_n - 2a_n \\ b_n - 2a_n & a_n - 2b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ b_{n+1} & a_{n+1} \end{pmatrix},$$

unde $a_{n+1} = a_n - 2b_n, b_{n+1} = b_n - 2a_n$.

Utilizând condițiile $a_{n+1} = a_n - 2b_n, b_{n+1} = b_n - 2a_n$ obținem

$$a_{n+2} = a_{n+1} - 2b_{n+1} = a_{n+1} - 2(b_n - 2a_n) = a_{n+1} - 2b_n + 4a_n =$$

$$= a_{n+1} + (a_{n+1} - a_n) + 4a_n = 2a_{n+1} + 3a_n.$$

Astfel am obținut că $a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n$, ceea ce implică $a_{n+2} + a_{n+1} = 3(a_{n+1} + a_n)$.

Notând $x_n = a_{n+1} + a_n$, ultima egalitate ia forma $x_{n+1} = 3x_n$.

Ținând cont de faptul că $x_1 = a_2 + a_1 = 6$, obținem $x_{n+1} = 6 \cdot 3^n = 2 \cdot 3^{n+1}$.

Atunci $a_{n+2} + a_{n+1} = 2 \cdot 3^{n+1}$, iar $a_{n+1} + a_n = 2 \cdot 3^n$.

Utilizând metoda inducției matematice, demonstrăm că $a_n = \frac{1}{2}(3^n + (-1)^n)$.

Într-adevăr: $a_1 = 1$. Presupunem că $a_n = \frac{1}{2}(3^n + (-1)^n)$.

Atunci

$$a_{n+1} = 2 \cdot 3^n - a_n = 2 \cdot 3^n - \frac{1}{2}(3^n + (-1)^n) = \frac{3}{2} \cdot 3^n - \frac{1}{2}(-1)^n = \frac{1}{2}(3^{n+1} + (-1)^{n+1}).$$

Condiția $a_{n+1} = a_n - 2b_n$ implică $b_n = \frac{1}{2}(a_n - a_{n+1}) = \frac{1}{2}((-1)^n - 3^n)$.

În concluzie $A^{2021} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(3^{2021} - 1) & -\frac{1}{2}(3^{2021} + 1) \\ -\frac{1}{2}(3^{2021} + 1) & \frac{1}{2}(3^{2021} - 1) \end{pmatrix}$.

Soluție 2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = I_2 - 2B$, unde $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Observăm că $B^2 = I_2$. Atunci $B^3 = B, B^{2k-1} = B, B^{2k} = I_2, k = 1, 2, ...$

Atunci

$$A^{2021} = (I_2 - 2B)^{2021} = I_2 - 2C_{2021}^1 B + 2^2 C_{2021}^2 I_2 + \cdots + (-2)^k C_{2021}^k B^k + \cdots - 2^{2021} B =$$

$= \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, unde

$$a = 1 + 2^2 C_{2021}^2 + \cdots + 2^{2k} C_{2021}^{2k} + \cdots + 2^{2020} C_{2021}^{2020},$$

$$b = -2C_{2021}^1 - \cdots - 2^{2k-1} C_{2021}^{2k-1} - \cdots - 2^{2021}.$$

Observăm că $a - b = (1+2)^{2021} = 3^{2021}$, iar $a + b = (1-2)^{2021} = -1$.

Atunci $a = \frac{1}{2}(3^{2021} - 1)$ și $b = -\frac{1}{2}(1 + 3^{2021})$,

iar $A^{2021} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(3^{2021} - 1) & -\frac{1}{2}(3^{2021} + 1) \\ -\frac{1}{2}(3^{2021} + 1) & \frac{1}{2}(3^{2021} - 1) \end{pmatrix}$.

12.5. Fie $I_n = \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{dx}{(x+1)(\ln^{2n} x + 1)}$, $n \geq 2$. Calculați $\lim_{n\to\infty} I_n$.

Soluție.

$$I_n = \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{dx}{(x+1)(\ln^{2n} x + 1)} = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{dx}{(x+1)(\ln^{2n} x + 1)} + \int_{1}^{n} \frac{dx}{(x+1)(\ln^{2n} x + 1)}.$$

Considerăm

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{dx}{(x+1)(\ln^{2n} x + 1)} = \left| \begin{array}{l} t = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{t} \\ dx = -\frac{1}{t^2} dt \\ x = \frac{1}{n} \Rightarrow t = n \\ x = 1 \Rightarrow t = 1 \end{array} \right| = \int_{1}^{n} \frac{dt}{t(t+1)(\ln^{2n} t + 1))} =$$

$$\int_{1}^{n} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) \frac{dt}{\ln^{2n} t + 1} = \int_{1}^{n} \frac{dt}{t(\ln^{2n} t + 1)} - \int_{1}^{n} \frac{dt}{(t+1)(\ln^{2n} t + 1)}.$$

Atunci

$$I_n = \int_{1}^{n} \frac{dt}{t(\ln^{2n} t + 1)} - \int_{1}^{n} \frac{dt}{(t+1)(\ln^{2n} t + 1)} + \int_{1}^{n} \frac{dx}{(x+1)(\ln^{2n} x + 1)} = \int_{1}^{n} \frac{dt}{t(\ln^{2n} t + 1)}.$$

Efectuând schimbarea de variabilă în ultima integrală, obținem

$$I_n = \int_1^n \frac{dt}{t(\ln^{2n} t + 1)} = \left| \begin{array}{c} z = \ln t \\ dz = \frac{1}{t} dt \\ t = 1 \Rightarrow z = 0 \\ t = n \Rightarrow z = \ln n \end{array} \right| = \int_0^{\ln n} \frac{dz}{z^{2n} + 1} = \int_0^1 \frac{dz}{z^{2n} + 1} + \int_1^{\ln n} \frac{dz}{z^{2n} + 1} =$$

$$= 1 - \int_0^1 \frac{z^{2n} dz}{z^{2n} + 1} + \int_1^{\ln n} \frac{dz}{z^{2n} + 1}.$$

Estimăm fiecare integrală în parte

$$0 \le \int_1^{\ln n} \frac{dz}{z^{2n}+1} < \int_1^{\ln n} z^{-2n} dz = \frac{1}{1-2n} z^{1-2n} \Big|_1^{\ln n} = \frac{1}{(1-2n)(\ln^{2n-1} n)} + \frac{1}{2n-1} \to 0, n \to \infty,$$

$$0 \le \int_0^1 \frac{z^{2n} dz}{z^{2n} + 1} \le \int_0^1 \frac{z^{2n-1} dz}{z^{2n} + 1} = \frac{1}{2n} \ln(z^{2n} + 1) \Big|_0^1 = \frac{1}{2n} \ln 2 \to 0, n \to \infty,$$

și obținem: $\lim\limits_{n \to \infty} I_n = 1$.