Республиканская Олимпиада по Математике
5 марта 2022 года, XII-й класс

СХЕМА ПРОВЕРКИ ТЕСТА

Примечание. ***Правильное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.***

12.1. Дана функция
$$f:\left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right]\to\mathbb{R},\qquad f(x)=\frac{3\cos(2x)-4\sin(2x)+\cos x-3\sin x}{(\sin x+3\cos x)^{2022}}.$$
Найдите первообразную $F:\left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$ функции f, при которой $F\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{1}{2021}$.

Решение со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	$\int\frac{3\cos(2x)-4\sin(2x)+\cos x-3\sin x}{(\sin x+3\cos x)^{2022}}dx=$ $=\int\frac{3\cos^2 x-3\sin^2 x-8\sin x\cos x+\cos x-3\sin x}{(\sin x+3\cos x)^{2022}}dx=$	1 балл
2.	$=\int\frac{(\sin x+3\cos x)(\cos x-3\sin x)+\cos x-3\sin x}{(\sin x+3\cos x)^{2022}}dx=$	2 балла
3.	$=\left\lvert\begin{matrix}t=\sin x+3\cos x\\ dt=(\cos x-3\sin x)dx\end{matrix}\right\rvert=$	2 балла
4.	$=\int\frac{t+1}{t^{2022}}dt=-\frac{t^{-2020}}{2020}-\frac{t^{-2021}}{2021}+C=$ $=-\frac{1}{2020(\sin x+3\cos x)^{2020}}-\frac{1}{2021(\sin x+3\cos x)^{2021}}+C.$	1 балл
5.	Получение $C=\frac{1}{2020}$ и запись правильного ответа.	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов

12.2. Дана пирамида $VABC$, в которой $AB=7$ см, $AC=5$ см, $BC=8$ см, $VB=6$ см, а двугранные углы при основании ABC конгруэнтны. Найдите расстояние от точки P до ребра VA, где AP – биссектриса в треугольнике ABC.

Решение со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Проекция вершины V на основание ABC есть центр O вписанной в треугольник ABC окружности	1 балл
2.	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=10\sqrt{3}$ см^2, $OM=ON=\sqrt{3}$см, где M и N есть точки касания сторон	1 балл

	AB и BC, соответственно, с окружностью, вписанной в треугольник ABC	
3.	$VO = 2\sqrt{2}$ см	1 балл
4.	$VA = \sqrt{15}$ см	1 балл
5.	$AP = \frac{5\sqrt{7}}{3}$ см	1 балл
6.	$VP = \frac{10}{3}$ см	1 балл
7.	Нахождение расстояния от точки P до ребра VA	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов

12.3. Пусть z комплексное число такое, что $z^{2020}|z| + \bar{z}\, i = 0$. Найдите множество значений выражения

$$E = z^{2020} - z^{2019}i + \cdots + (-1)^k z^{2020-k} i^k + \cdots + zi + 1.$$

Решение 1 со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	$z^{2020}\lvert z\rvert + \bar{z}\, i = 0 \Leftrightarrow z^{2021}\lvert z\rvert + z\bar{z}\, i = 0 \Leftrightarrow z^{2021}\lvert z\rvert + \lvert z\rvert^2 i = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow z^{2021}\lvert z\rvert = -\lvert z\rvert^2 i \Rightarrow \lvert z\rvert^{2021} = \lvert z\rvert \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lvert z\rvert = 0 \\ \lvert z\rvert = 1\,. \end{array}\right.$	1 балл
2.	Получение, при $\lvert z\rvert = 0, E = 1$	1 балл
3.	Получение, при $\lvert z\rvert = 1$, că $z^{2021} = -i$	1 балл
4.	Получение, при $z \neq -i$, $E = z^{2020}\left(1 + \frac{1}{zi} + \left(\frac{1}{zi}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{zi}\right)^k + \left(\frac{1}{zi}\right)^{2020}\right) =$	1 балл
	$= z^{2020}\frac{1 - \left(\frac{1}{zi}\right)^{2021}}{1 - \frac{1}{zi}} =$	1 балл
	$= z^{2020}\frac{(zi)^{2021} - 1}{(zi)^{2021}} \cdot \frac{zi}{zi - 1} = \frac{z^{2021}i - 1}{zi - 1} = \frac{-i^2 - 1}{zi - 1} = 0.$	1 балл
5.	Получение, при $z = -i, E = 2021$	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов

Решение 2 со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	$z^{2020}\lvert z\rvert + \bar{z}\, i = 0 \Leftrightarrow z^{2021}\lvert z\rvert + z\bar{z}\, i = 0 \Leftrightarrow z^{2021}\lvert z\rvert + \lvert z\rvert^2 i = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow z^{2021}\lvert z\rvert = -\lvert z\rvert^2 i \Rightarrow \lvert z\rvert^{2021} = \lvert z\rvert \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lvert z\rvert = 0 \\ \lvert z\rvert = 1\,. \end{array}\right.$	1 балл

2.	Получение, при $\lvert z\rvert = 0, E = 1$	1 балл
3.	Получение, при $\lvert z\rvert = 1$, că $z^{2021} = -i$	1 балл
4.	Получение $z^{2021} + i^{2021} = (z^{2020} - z^{2019}i + \dots + (-1)^k z^{2020-k} i^k + \dots + zi + 1)(z+i) = = E(z+i)$	2 балла
5.	Получение, при $z \neq -i, E = \frac{z^{2021}+i^{2021}}{z+i} = \frac{z^{2021}+i}{z+i} = 0$	1 балл
6.	Получение, при $z = -i, E = 2021$	
	Общее количество баллов	7 баллов

12.4. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Найдите A^{2021}.

Решение 1 со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Доказательство того, что $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix}$	1 балл
2.	Получение $a_{n+1} = a_n - 2b_n, b_{n+1} = b_n - 2a_n$	1 балл
3.	$x_{n+1} = 3x_n$, где $x_n = a_{n+1} + a_n$	1 балл
4.	Получение $x_{n+1} = 2 \cdot 3^{n+1}$	1 балл
5.	Получение $a_n = \frac{1}{2}(3^n + (-1)^n)$	2 балла
6.	Получение $b_n = \frac{1}{2}((-1)^n - 3^n)$ и вывод, что $$A^{2021} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(3^{2021}-1) & -\frac{1}{2}(3^{2021}+1) \\ -\frac{1}{2}(3^{2021}+1) & \frac{1}{2}(3^{2021}-1) \end{pmatrix}$$	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов

Решение 2 со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	$A = I_2 - 2B$, где $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	1 балл
2.	$B^{2k-1} = B, B^{2k} = I_2, k = 1, 2, \dots$	1 балл
3.	$A^{2021} = (I_2 - 2B)^{2021} = = I_2 - 2C_{2021}^1 B + 2^2 C_{2021}^2 I_2 + \dots + (-2)^k C_{2021}^k B^k + \dots - 2^{2021} B$	1 балл
4.	$A^{2021} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$,	1 балл

	где $$a = 1 + 2^2 C_{2021}^2 + \cdots + 2^{2k} C_{2021}^{2k} + \cdots + 2^{2020} C_{2021}^{2020},$$ $$b = -2C_{2021}^1 - \cdots - 2^{2k-1} C_{2021}^{2k-1} - \cdots - 2^{2021}.$$	
5.	Получение $a - b = 3^{2021}$ și $a + b = -1$	2 балла
6.	Получение $a = \frac{1}{2}(3^{2021} - 1)$ și $b = -\frac{1}{2}(3^{2021})$ и вывод, что $$A^{2021} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(3^{2021} - 1) & -\frac{1}{2}(3^{2021} + 1) \\ -\frac{1}{2}(3^{2021} + 1) & \frac{1}{2}(3^{2021} - 1) \end{pmatrix}$$	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов

12.5. Пусть
$$I_n = \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{dx}{(x+1)(\ln^{2n} x + 1)},\ n \geq 2.$$
Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

Решение 1 со схемой распределения баллов для

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	$$I_n = \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{dx}{(x+1)(\ln^{2n} x + 1)} = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{dx}{(x+1)(\ln^{2n} x + 1)} + \int_{1}^{n} \frac{dx}{(x+1)(\ln^{2n} x + 1)}$$	1 балл
2.	$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{dx}{(x+1)(\ln^{2n} x + 1)} = \begin{vmatrix} t = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{t} \\ dx = -\frac{1}{t^2}dt \\ x = \frac{1}{n} \Rightarrow t = n \\ x = 1 \Rightarrow t = 1 \end{vmatrix} =$$	1 балл
3.	$$= \int_{1}^{n} \frac{dt}{t(t+1)(\ln^{2n} t + 1))} = \int_{1}^{n} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)\frac{dt}{\ln^{2n} t + 1} =$$ $$\int_{1}^{n} \frac{dt}{t(\ln^{2n} t + 1)} - \int_{1}^{n} \frac{dt}{(t+1)(\ln^{2n} t + 1)}$$	1 балл
4.	Получение $I_n = \int_1^n \frac{dt}{t(\ln^{2n} t+1)}$	1 балл
5.	$$I_n = \int_{1}^{n} \frac{dt}{t(\ln^{2n} t + 1)} = \begin{vmatrix} z = \ln t \\ dz = \frac{1}{t}dt \\ t = 1 \Rightarrow z = 0 \\ t = n \Rightarrow z = \ln n \end{vmatrix} =$$	1 балл

	$$= \int_0^{\ln n} \frac{dz}{z^{2n}+1} = \int_0^1 \frac{dz}{z^{2n}+1} + \int_1^{\ln n} \frac{dz}{z^{2n}+1} = 1 - \int_0^1 \frac{z^{2n}dz}{z^{2n}+1} + \int_1^{\ln n} \frac{dz}{z^{2n}+1}$$	
6.	$$0 \le \int_1^{\ln n} \frac{dz}{z^{2n}+1} < \int_1^{\ln n} z^{-2n} dz = \frac{1}{1-2n} z^{1-2n}\Big\vert_1^{\ln n} =$$ $$= \frac{1}{(1-2n)(\ln^{2n-1} n)} + \frac{1}{2n-1} \to 0, n \to \infty$$	1 балл
7.	$$0 \le \int_0^1 \frac{z^{2n}dz}{z^{2n}+1} \le \int_0^1 \frac{z^{2n-1}dz}{z^{2n}+1} = \frac{1}{2n} \ln(z^{2n}+1)\Big\vert_0^1 = \frac{1}{2n} \ln 2 \to 0, n \to \infty$$ И получение $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 1$.	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов