Olimpiada Republicană la Matematică
5 martie 2022, Clasa a XII–a

BAREM DE EVALUARE

Remarcă. ***Rezolvarea corectă a fiecărei probleme se apreciază cu 7 puncte.***

12.1. Fie funcția $f:\left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{3\cos(2x)-4\sin(2x)+\cos x-3\sin x}{(\sin x+3\cos x)^{2022}}$.

Determinați primitiva $F:\left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$ a funcției f, pentru care $F\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{1}{2021}$.

Rezolvare cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	$\int\frac{3\cos(2x)-4\sin(2x)+\cos x-3\sin x}{(\sin x+3\cos x)^{2022}}dx=$ $=\int\frac{3\cos^2 x-3\sin^2 x-8\sin x\cos x+\cos x-3\sin x}{(\sin x+3\cos x)^{2022}}dx=$	1 puncte
2.	$=\int\frac{(\sin x+3\cos x)(\cos x-3\sin x)+\cos x-3\sin x}{(\sin x+3\cos x)^{2022}}dx=$	2 puncte
3.	$=\left\lvert\begin{matrix} t=\sin x+3\cos x \\ dt=(\cos x-3\sin x)dx\end{matrix}\right\rvert=$	2 puncte
4.	$=\int\frac{t+1}{t^{2022}}dt=-\frac{t^{-2020}}{2020}-\frac{t^{-2021}}{2021}+C=$ $=-\frac{1}{2020(\sin x+3\cos x)^{2020}}-\frac{1}{2021(\sin x+3\cos x)^{2021}}+C.$	1 punct
5.	Obținerea $C=\frac{1}{2020}$ și scrierea răspunsului corect.	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

12.2. Fie piramida $VABC$, în care $AB=7$ cm, $AC=5$ cm, $BC=8$ cm, $VB=6$ cm, iar unghiurile diedre de la baza ABC sunt congruente. Să se determine distanța de la punctul P la muchia VA, unde AP este bisectoare în triunghiul ABC.

Rezolvare cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Proiecția vârfului V pe baza ABC este centru O al cercului înscris în triunghiul ABC	1 punct
2.	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=10\sqrt{3}$ cm^2, $OM=ON=\sqrt{3}$ cm, unde M și N sunt punctele de tangență ale	1 punct

	laturilor AB și BC, respectiv, cu cercul înscris în triunghiul ABC	
3.	$VO = 2\sqrt{2}$ cm	1 punct
4.	$VA = \sqrt{15}$ cm	1 punct
5.	$AP = \frac{5\sqrt{7}}{3}$ cm	1 punct
6.	$VP = \frac{10}{3}$ cm.	1 punct
7.	Determinarea distanței de la punctul P la muchia VA	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

12.3. Fie numărul complex z, pentru care $z^{2020}\lvert z\rvert + \bar{z}\,i = 0$. Determinați mulțimea valorilor expresiei $$E = z^{2020} - z^{2019}i + \cdots + (-1)^k z^{2020-k} i^k + \cdots + zi + 1.$$		
Rezolvare 1 cu barem de evaluare		
Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	$z^{2020}\lvert z\rvert + \bar{z}\,i = 0 \Leftrightarrow z^{2021}\lvert z\rvert + z\bar{z}\,i = 0 \Leftrightarrow z^{2021}\lvert z\rvert + \lvert z\rvert^2 i = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow z^{2021}\lvert z\rvert = -\lvert z\rvert^2 i \Rightarrow \lvert z\rvert^{2021} = \lvert z\rvert \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\lvert z\rvert = 0\\ \lvert z\rvert = 1\,.\end{array}\right.$	1 punct
2.	Obținerea, pentru $\lvert z\rvert = 0$, $E = 1$	1 punct
3.	Obținerea, pentru $\lvert z\rvert = 1$, că $z^{2021} = -i$	1 punct
4.	Obținerea, pentru $z \neq -i$, $$E = z^{2020}\left(1 + \frac{1}{zi} + \left(\frac{1}{zi}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{zi}\right)^k + \left(\frac{1}{zi}\right)^{2020}\right) =$$ $$= z^{2020}\,\frac{1 - \left(\frac{1}{zi}\right)^{2021}}{1 - \frac{1}{zi}} =$$ $$= z^{2020}\,\frac{(zi)^{2021} - 1}{(zi)^{2021}} \cdot \frac{zi}{zi - 1} = \frac{z^{2021} i - 1}{zi - 1} = \frac{-i^2 - 1}{zi - 1} = 0.$$	1 punct 1 punct 1 punct
5.	Obținerea, pentru $z = -i$, $E = 2021$	1 punct
	Punctaj total	7 puncte
Rezolvare 2 cu barem de evaluare		
Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	$z^{2020}\lvert z\rvert + \bar{z}\,i = 0 \Leftrightarrow z^{2021}\lvert z\rvert + z\bar{z}\,i = 0 \Leftrightarrow z^{2021}\lvert z\rvert + \lvert z\rvert^2 i = 0 \Leftrightarrow$	1 punct

	$\Leftrightarrow z^{2021}\lvert z\rvert = -\lvert z\rvert^2 i \Rightarrow \lvert z\rvert^{2021} = \lvert z\rvert \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\lvert z\rvert = 0 \\ \lvert z\rvert = 1\,.\end{array}\right.$	
2.	Obținerea, pentru $\lvert z\rvert = 0, E = 1$	1 punct
3.	Obținerea, pentru $\lvert z\rvert = 1$, că $z^{2021} = -i$	1 punct
4.	Obținerea $z^{2021} + i^{2021} = (z^{2020} - z^{2019}i + \cdots + (-1)^k z^{2020-k} i^k + \cdots + zi + 1)(z+i) =$ $= E(z+i)$	2 puncte
5.	Obținerea, pentru $z \neq -i, E = \frac{z^{2021}+i^{2021}}{z+i} = \frac{z^{2021}+i}{z+i} = 0$	1 punct
6.	Obținerea, pentru $z = -i, E = 2021$	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

12.4. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Determinați A^{2021}.		
Rezolvare 1 cu barem de evaluare		
Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Demonstrarea că $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix}$	1 punct
2.	Obținerea $a_{n+1} = a_n - 2b_n, b_{n+1} = b_n - 2a_n$	1 punct
3.	$x_{n+1} = 3x_n$, unde $x_n = a_{n+1} + a_n$	1 punct
4.	Obținerea $x_{n+1} = 2 \cdot 3^{n+1}$	1 punct
5.	Obținerea $a_n = \frac{1}{2}(3^n + (-1)^n)$	2 puncte
6.	Obținerea $b_n = \frac{1}{2}((-1)^n - 3^n)$ și concluzionarea că $$A^{2021} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(3^{2021} - 1) & -\frac{1}{2}(3^{2021} + 1) \\ -\frac{1}{2}(3^{2021} + 1) & \frac{1}{2}(3^{2021} - 1) \end{pmatrix}$$	1 punct
	Punctaj total	7 puncte
Rezolvare 2 cu barem de evaluare		
Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	$A = I_2 - 2B$, unde $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	1 punct
2.	$B^{2k-1} = B, B^{2k} = I_2, k = 1, 2, \ldots$	1 punct
3.	$A^{2021} = (I_2 - 2B)^{2021} =$ $= I_2 - 2C_{2021}^1 B + 2^2 C_{2021}^2 I_2 + \cdots + (-2)^k C_{2021}^k B^k + \cdots - 2^{2021} B =$	1 punct
4.	$A^{2021} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$,	2 puncte

	unde $$a = 1 + 2^2 C_{2021}^2 + \cdots + 2^{2k} C_{2021}^{2k} + \cdots + 2^{2020} C_{2021}^{2020},$$ $$b = -2C_{2021}^1 - \cdots - 2^{2k-1} C_{2021}^{2k-1} - \cdots - 2^{2021}.$$	
5.	Obținerea $a - b = 3^{2021}$ și $a + b = -1$	1 punct
6.	Obținerea $a = \frac{1}{2}(3^{2021} - 1)$ și $b = -\frac{1}{2}(1 + 3^{2021})$ și concluzionarea că $$A^{2021} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(3^{2021} - 1) & -\frac{1}{2}(3^{2021} + 1) \\ -\frac{1}{2}(3^{2021} + 1) & \frac{1}{2}(3^{2021} - 1) \end{pmatrix}$$	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

12.5. Fie $I_n = \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{dx}{(x+1)(\ln^{2n} x + 1)}$, $n \geq 2$. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

Rezolvare 1 cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	$$I_n = \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{dx}{(x+1)(\ln^{2n} x + 1)} = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{dx}{(x+1)(\ln^{2n} x + 1)} + \int_{1}^{n} \frac{dx}{(x+1)(\ln^{2n} x + 1)}$$	1 punct
2.	$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{dx}{(x+1)(\ln^{2n} x + 1)} = \left| \begin{array}{c} t = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{t} \\ dx = -\frac{1}{t^2} dt \\ x = \frac{1}{n} \Rightarrow t = n \\ x = 1 \Rightarrow t = 1 \end{array} \right| =$$	1 punct
3.	$$= \int_{1}^{n} \frac{dt}{t(t+1)(\ln^{2n} t + 1))} = \int_{1}^{n} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) \frac{dt}{\ln^{2n} t + 1} =$$ $$\int_{1}^{n} \frac{dt}{t(\ln^{2n} t + 1)} - \int_{1}^{n} \frac{dt}{(t+1)(\ln^{2n} t + 1)}$$	1 punct
4.	Obținerea $I_n = \int_1^n \frac{dt}{t(\ln^{2n} t + 1)}$	1 punct
5.	$$I_n = \int_{1}^{n} \frac{dt}{t(\ln^{2n} t + 1)} = \left| \begin{array}{c} z = \ln t \\ dz = \frac{1}{t} dt \\ t = 1 \Rightarrow z = 0 \\ t = n \Rightarrow z = \ln n \end{array} \right| =$$ $$= \int_{0}^{\ln n} \frac{dz}{z^{2n} + 1} = \int_{0}^{1} \frac{dz}{z^{2n} + 1} + \int_{1}^{\ln n} \frac{dz}{z^{2n} + 1} = 1 - \int_{0}^{1} \frac{z^{2n} dz}{z^{2n} + 1} + \int_{1}^{\ln n} \frac{dz}{z^{2n} + 1}$$	1 punct
6.	$$0 \leq \int_{1}^{\ln n} \frac{dz}{z^{2n} + 1} < \int_{1}^{\ln n} z^{-2n} dz = \frac{1}{1 - 2n} z^{1-2n} \Big|_{1}^{\ln n} =$$	1 punct

	$=\frac{1}{(1-2n)(\ln^{2n-1} n)}+\frac{1}{2n-1} \to 0, n \to \infty$	
7.	$0 \le \int_0^1 \frac{z^{2n}dz}{z^{2n}+1} \le \int_0^1 \frac{z^{2n-1}dz}{z^{2n}+1} = \frac{1}{2n}\ln(z^{2n}+1)\Big\|_0^1 = \frac{1}{2n}\ln 2 \to 0, n \to \infty$ și obținerea $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 1$.	1 punct
	Punctaj total	7 puncte