Olimpiada Republicană la Matematică
5 martie 2022, Clasa a XI–a

Soluții

11.1. *Fie a și x_1 două numere reale pozitive. Să se arate că șirul $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, definit de relația*

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \forall n \geq 1, \qquad (*)$$

are limită și să se determine această limită.

Soluție.

0) Dacă $x_1 > 0$, atunci și $x_n > 0$, $\forall n \geq 1$ (prin inducție).

1) $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \geq \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{x_n \cdot \frac{a}{x_n}} = \sqrt{a}$, $\forall n \geq 1$, șirul $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ este mărginit inferior.

2) $x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}x_n - \frac{a}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n - \frac{a}{x_n}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x_n^2 - a}{x_n} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{(\sqrt{a})^2 - a}{x_n} = 0$
(deoarece $x_n > 0$), $\forall n \geq 2$.

3) Atunci $(x_n)_{n=2}^{\infty}$ este șir descrescător, mărginit inferior de $\sqrt{a} > 0$. Conform teoremei lui Weierstrass acest șir are limita A$\geq \sqrt{a}$.

4) Trecem la limită în formula $(*)$:

$$A = \frac{1}{2}\left(A + \frac{a}{A}\right) = \frac{A}{2} + \frac{a}{2A},$$
$$\frac{A}{2} = \frac{a}{2A} \Rightarrow A^2 = a,$$
$$A = \sqrt{a}.$$

11.2. *Să se afle toate funcțiile derivabile $f: (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ ce verifică relațiile $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ și $f'(x) = -f^3(x)$.*

Soluție.

Avem $(f^{-2}(x))' = -2f^{-3}(x)f'(x) = 2f^{-3}(x)f^3(x) = 2$, adică derivata funcției $f^{-2}(x)$ este o constantă. Rezultă că funcția $f^{-2}(x)$ reprezintă o funcție liniară, ce poate fi scrisă în forma $f^{-2}(x) = ax + b$. Derivând, obținem $2 = (f^{-2}(x))' = a$. În plus, din condiția $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ avem $1 = f^{-2}\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} + b = 1 + b$, ceea ce implică $b = 0$. Obținem $f^{-2}(x) = 2x$, adică $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}}$.

Observăm că această funcție este definită pe întreg intervalul $(0, +\infty)$ și este derivabilă pe același interval. Avem $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \frac{1}{2}}} = 1$ și

$$f'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2x}}\right)' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x^{-1/2}\right)' = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot x^{-3/2} = -\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot x^{-1/2}\right)^3 = -f^3(x).$$

Deci, funcția $f: (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}}$, este unica ce verifică condiția problemei.

11.3. *Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația*

$$\cos\frac{\pi}{x} = -x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 12x^3 - 9x^2 - 1.$$

Soluție.

Avem

$$1 \geq -\cos\frac{\pi}{x} = x^6 + 4x^5 - 2x^4 - 12x^3 + 9x^2 + 1 = x^2(x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9) + 1 =$$
$$= x^2[(x^2 + 2x)^2 - 6x^2 - 12x + 9] + 1 = x^2[(x^2 + 2x)^2 - 6(x^2 + 2x) + 9] + 1 =$$
$$= [x(x^2 + 2x - 3)]^2 + 1 = [x(x-1)(x+3)]^2 + 1 \geq 1,$$

ceea ce implică $[x(x-1)(x+3)]^2 + 1 = 1$, adică $x = 0$, $x = 1$ sau $x = -3$.

Valoarea $x = 0$ nu e soluție deoarece nu e din domeniului de definiție al funcției $f(x) = \cos\frac{\pi}{x}$.

Pentru $x = 1$ avem $-\cos\frac{\pi}{x} = -\cos\pi = 1$, deci $x = 1$ e soluție.

Pentru $x = -3$ avem $-\cos\frac{\pi}{x} = -\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} \neq 1$, deci $x = -3$ nu e soluție.

În concluzie, singura soluție reală a ecuației din enunț este $x = 1$.

11.4. *Fie dat triunghiul ABC și $BC = a$. Considerăm un punct M pe semidreapta $[CA)$, astfel încât $\angle MBC = \angle BAC$. Găsiți cea mai mică distanță posibilă dintre centrele O_1 și O_2 ale cercurilor circumscrise triunghiurilor ABC și ABM.*

Soluție.

Sunt posibile 2 cazuri:

1. $\angle ABC > \angle BAC$. Atunci $M \in [AC]$.
2. $\angle ABC \leq \angle BAC$. Atunci M se află pe prelungirea dreptei (AC) după punctul A și $M \notin [AC]$.

Considerăm <u>cazul 1</u>. ΔABC este asemenea cu ΔBMC (deoarece $\angle C$ este comun, iar $\angle MBC = \angle BAC$ conform condiției). Deci

$$\frac{AB}{MB} = \frac{BC}{MC} = \frac{AC}{BC}.$$

Atunci

$$BC^2 = AC \cdot MC,$$

deci BC este tangentă la cercul cu centrul în O_2, circumscris triunghiului ΔABM.

Fie D – mijlocul lui BC. Atunci centrul O_1 a cercului, circumscris triunghiului ΔABC, se află pe mediatoare (perpendicular dusă prin mijlocul segmentului)

$$DO_1;\ DO_1 \perp BC.$$

Deoarece BC – tangentă în punctul B la cercul cu centrul O_2, atunci $O_2B \perp BC$.

Atunci segmentul $[BD]$ de lungime $\frac{a}{2}$ este proiecția ortogonală a segmentului $[O_2O_1]$ pe dreapta (BC). Deci

$$O_2O_1 \geq \frac{a}{2}.$$

Egalitatea are loc când $\angle B = 90°$ și O_1 e mijlocul lui AC, O_2 este mijlocul lui $AB, BM \perp AC$.

Rezultă că valoarea cea mai mică a distanței dintre centrele O_1 și O_2 este egală cu $\frac{a}{2}$.

<u>Cazul 2</u> se cercetează analog și dă același rezultat.

11.5. *Într-o grădină zoologică locuiesc hameleoni de trei culori: x hameleoni de culoare sură, 2022 hameleoni de culoare albă și 100 hameleoni de culoare roz. Hameleonii se pot întâlni între ei, însă doar câte doi. Dacă se întâlnesc 2 hameleoni de aceeași culoare, atunci ei nu își schimbă culoarea. Dacă se întâlnesc 2 hameleoni de culori diferite, atunci ambii în același timp își schimbă culoarea în a treia culoare. Pentru ce valori x este posibilă situația, când într-un moment de timp toți hameleonii din grădina zoologică sunt de aceeași culoare?*

Soluție.

Presupunem că într-un moment concret de timp în grădina zoologică sunt: *a* hameleoni suri, *b* hameleoni albi și *c* rhameleoni roz, adică avem tripletul (a, b, c). După momentul întâlnirii a oricăror doi hameleoni, acest triplet se schimbă în unul dintre următoarele trei:

a) $(a - 1, b - 1, c + 2)$, sau

b) $(a - 1, b + 2, c - 1)$, sau

c) $(a + 2, b - 1, c - 1)$.

Considerăm trei diferențe pozitive dintre numerele din tripletul de hameleoni după culorile lor. Înainte de întâlnirea a doi hameleoni acestea sunt:

$$(a - b), \qquad (b - c), \qquad (a - c).$$

După întâlnire avem următoarele diferențe pozitive:

a) $(a - b)$, $(b - c - 3)$, $(a - c - 3)$, sau

b) $(a - b - 3)$, $(b - c + 3)$, $(a - c)$, sau

c) $(a - b + 3)$, $(b - c)$, $(a - c + 3)$.

Observăm că după întâlnire, aceste diferențe sau nu se schimbă, sau se schimbă cu 3 sau cu -3.

Prin urmare, resturile (r_1, r_2, r_3) de la împărțirea acestor diferențe la 3 rămân aceleași după orice întâlnire a oricăror doi hameleoni, și, în consecință rămân aceleași după orice număr de întâlniri a perechilor de hameleoni.

Conform condiției, inițial, aceste diferențe sunt egale cu: $(x - 2022), (2022 - 100), (x - 100)$ și

$$\begin{aligned} x - 2022 &= r_1 + 3m, \\ 2022 - 100 = 1922 &= r_2 + 3n, \qquad m, n, k \in Z \\ x - 100 &= r_3 + 3k. \end{aligned}$$

De aici rezultă

$$\begin{aligned} x &= r_1 + 3t, \\ r_2 &= 2, \qquad\qquad t, s \in N. \qquad\qquad (*) \\ x &= r_3 + 1 + 3s. \end{aligned}$$

Dacă toți hameleonii vor deveni de o culoare, atunci pentru tripletul final (a, b, c) vom avea unul dintre variantele: sau $(0,0,p)$, sau $(0,p,0)$, sau $(p,0,0)$, unde $p = 2022 + 100 + x = 2122 + x$. Atunci sau $r_1 = 0, r_2 = r_3$, sau $r_3 = 0, r_1 = r_2$, sau $r_2 = 0, r_1 = r_3$. Din sistemul (*) rezultă că doar primul caz poate avea loc, și

$$x = 3t, \;\; t \in Z,$$

adică *x* se divide la 3.

Rămâne să arătăm că pentru orice tripletul de (3t, 2022, 100) hameleoni se poate ajunge la o situație cu toți hameleonii de aceeași culoare (unde tripletul (a, b, c) are 2 poziții nule).

Dacă se vor întâlni hameleonii de culoare sură și albă, și apoi de culoare roz și albă, atunci vom obține tripletul $(x + 1{,}2020{,}101)$. Repetăm aceste întâlniri până când pozitia 1 și 2 în triplet se vor egala, sau pozitia 2 și 3 în triplet se vor egala. Deoarece resturile pe mod3 a pozițiilor sunt diferite, atunci va avea loc una din aceste două situații. Îndată ce careva 2 poziții în triplet se vor egala, atunci vom organiza întâlnirile hameleonilor de culoarele corespunzătoare acestor poziții. La finele acestor întâlniri aceste poziții vor fi egale cu 0.