

Республиканская Олимпиада по Математике
5 марта 2022, XI–й класс
Схема оценки работ

11.1. Пусть a и x_1 есть два положительных действительных числа. Докажите, что последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, определенная формулой $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$, $\forall n \geq 1$, имеет предел, и найдите этот предел.

Этапы решения со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1	Обоснование факта, что $x_n > 0$, $\forall n \geq 1$.	1
2	Доказательство факта что последовательность $(x_n)_{n=2}^{\infty}$ ограничена снизу числом $\sqrt{a} > 0$.	1
3	Доказательство факта что последовательность $(x_n)_{n=2}^{\infty}$ убывающая.	1
4	Доказательство существования предела A последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.	1
5	Доказательство неравенства $A \geq \sqrt{a}$.	1
6	Переход к пределу в исходной формуле из условия задачи.	1
7	Нахождение значения предела: $A = \sqrt{a}$.	1
<i>Общее количество баллов</i>		7 баллов

Примечание: Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.

11.2. Найдите все дифференцируемые функции $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ удовлетворяющие условиям $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ и $f'(x) = -f^3(x)$.

Этапы решения со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1	Доказательство равенства $(f^{-2}(x))' = 2$.	1
2	Обоснование утверждения, что $f^{-2}(x)$ есть функция вида $f^{-2}(x) = ax + b$.	1
3	Доказательство равенства $f^{-2}(x) = 2x$.	1
4	Доказательство равенства $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}}$.	1
5	Обоснование утверждения, что функция $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}}$ определена на всем интервале $(0, +\infty)$ и дифференцируема на этом интервале.	1
6	Проверка того факта, что функция $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}}$ удовлетворяет условиям $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ и $f'(x) = -f^3(x)$.	1
7	Вывод утверждения, что функция $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}}$, является единственной функцией, которая удовлетворяет условиям задачи.	1
<i>Общее количество баллов</i>		7 баллов

Примечание: Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.

11.3. Решите на множестве действительных чисел уравнение

$$\cos \frac{\pi}{x} = -x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 12x^3 - 9x^2 - 1.$$

Этапы решения со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1	Запись неравенства $1 \geq -\cos \frac{\pi}{x} = x^6 + 4x^5 - 2x^4 - 12x^3 + 9x^2 + 1$.	1
2	$E(x) \stackrel{\text{def}}{=} x^6 + 4x^5 - 2x^4 - 12x^3 + 9x^2 = x^2(x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9)$	1
3	$E(x) = x^2[(x^2 + 2x)^2 - 6(x^2 + 2x) + 9]$	1
4	$E(x) = [x(x^2 + 2x - 3)]^2 = 0$.	1
5	Получение потенциальных решений: $x = 0$, $x = 1$ или $x = -3$.	1
6	Доказательство факта, что $x = 0$ и $x = -3$ не являются решениями.	1
7	Проверка того, что $x = 1$ является решением.	1
<i>Общее количество баллов</i>		7 баллов

Примечание: Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.

11.4. Пусть дан треугольник ABC и $BC = a$. Рассмотрим точку M на полупрямой $[CA)$ такую, что $\angle MBC = \angle BAC$. Найдите наименьшее возможное расстояние между центрами O_1 и O_2 окружностей, описанных вокруг треугольников ABC и ABM .

Этапы решения со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1	Разбиение задачи на 2 случая.	1
2	Доказательство равенства $BC^2 = AC \cdot MC$ и вывод утверждения, что BC есть касательная к окружности с центром O_2 , описанной вокруг треугольника $\triangle ABM$.	1
3	Доказательство того, что $DO_1 \perp BC$ и $O_2B \perp BC$, где D - середина BC .	1
4	Доказательство утверждения, что отрезок $[BD]$ длины $\frac{a}{2}$ есть ортогональная проекция отрезка $[O_2O_1]$ на прямую (BC) и вывод неравенства $O_2O_1 \geq \frac{a}{2}$.	1
5	Доказательство того факта, что равенство имеет место при $\angle B = 90^\circ$ и O_1 есть середина AC , O_2 есть середина AB , $BM \perp AC$.	1
6	Демонстрация того, что второй случай доказывается аналогично.	1
7	Вывод, что наименьшее возможное расстояние между центрами O_1 и O_2 равно $\frac{a}{2}$.	1
<i>Общее количество баллов</i>		7 баллов

Примечание: Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.

11.5. В зоологическом саду живут X хамелеонов серого цвета, 2022 белого цвета и 100 розового цвета, которые могут встречаться только по двое. Если встречаются 2 хамелеона одного цвета, то их цвета не меняются после встречи. Если встречаются 2 хамелеона разных цветов, то они оба в тот же момент меняют свой цвет на оставшийся третий цвет. Найти все возможные значения для X , при которых возможна ситуация, что в какой-то момент все хамелеоны сада станут одного цвета.

Этапы решения со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1	Рассмотрение числа хамелеонов различных цветов, как триплета (a, b, c) . Нахождение вариантов изменения триплета (a, b, c) после встречи 2 хамелеонов.	1
2	Исследование 3 разностей числа хамелеонов в триplete до встречи 2 хамелеонов и после нее (по вариантам).	1
3	Доказательство утверждения, что указанные 3 разности или не меняются, или меняются на ± 3 .	1
4	Доказательство утверждения, что остатки от деления на 3 указанных разностей не меняются при встрече 2 хамелеонов.	1
5	Демонстрация того, что исходные разности равны $(X - 2022)$, $(2022 - 100)$ и $(X - 100)$. Демонстрация того, что если возникла ситуация, что все хамелеоны одного цвета то мы имеем триплеты: либо $(0, 0, M)$, либо $(0, M, 0)$, либо $(M, 0, 0)$. Доказательство факта что тогда $X = 3m$ или $X = 3m + 1$, $m \in \mathbb{N}$.	1
6.	Доказательство возможности финальной ситуации со всеми хамелеонами одного цвета.	2
	<i>Общее количество баллов</i>	7 баллов

Примечание: Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.