

Olimpiada Republicană la Matematică

5 martie 2022, Clasa a XI-a

Barem de evaluare

11.1. Fie a și x_1 două numere reale pozitive. Să se arate că șirul $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, definit de relația $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$, $\forall n \geq 1$, are limită și să se determine această limită.		
Etape ale rezolvării cu barem de evaluare		
Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Argumentarea faptului că $x_n > 0$, $\forall n \geq 1$.	1
2	Obținerea faptului că șirul $(x_n)_{n=2}^{\infty}$ este mărginit inferior de $\sqrt{a} > 0$.	1
3	Obținerea faptului că șirul $(x_n)_{n=2}^{\infty}$ este descrescător.	1
4	Argumentarea existenței limitei A a șirului $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.	1
5	Obținerea inegalității $A \geq \sqrt{a}$.	1
6	Trecerea la limită în relația din enunț.	1
7	Obținerea valorii limitei: $A = \sqrt{a}$.	1
Punctaj total		7 puncte

Remarcă: Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.

11.2. Să se afle toate funcțiile derivabile $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ ce verifică relațiile $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ și $f'(x) = -f^3(x)$.		
Etape ale rezolvării cu barem de evaluare		
Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Obținerea egalității $(f^{-2}(x))' = 2$.	1
2	Argumentarea faptului că $f^{-2}(x)$ e o funcție de forma $f^{-2}(x) = ax + b$.	1
3	Obținerea egalității $f^{-2}(x) = 2x$.	1
4	Obținerea egalității $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}}$.	1
5	Menționarea faptului că funcția $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}}$ este definită pe întreg intervalul $(0, +\infty)$ și este derivabilă pe același interval.	1
6	Verificarea faptului că $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}}$ respectă relațiile $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ și $f'(x) = -f^3(x)$.	1
7	Concluzionarea faptului că $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}}$, este unica funcție ce verifică condiția problemei.	1
Punctaj total		7 puncte

Remarcă: Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.

11.3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\cos \frac{\pi}{x} = -x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 12x^3 - 9x^2 - 1$.		
Etapе ale rezolvării cu barem de evaluare		
Pasul	Etapе ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Scrierea inegalității $1 \geq -\cos \frac{\pi}{x} = x^6 + 4x^5 - 2x^4 - 12x^3 + 9x^2 + 1$.	1
2	$E(x) \stackrel{\text{def}}{=} x^6 + 4x^5 - 2x^4 - 12x^3 + 9x^2 = x^2(x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9)$	1
3	$E(x) = x^2[(x^2 + 2x)^2 - 6(x^2 + 2x) + 9]$	1
4	$E(x) = [x(x^2 + 2x - 3)]^2 = 0$.	1
5	Obținerea candidaților pentru soluții: $x = 0$, $x = 1$ sau $x = -3$.	1
6	Argumentarea faptului că $x = 0$ și $x = -3$ nu sunt soluții.	1
7	Verificarea faptului că $x = 1$ este soluție.	1
Punctaj total		7 puncte

Remarcă: Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.

11.4. Fie dat triunghiul ABC și $BC = a$. Considerăm un punct M pe semidreapta [CA), astfel încât $\angle MBC = \angle BAC$. Găsiți cea mai mică distanță posibilă dintre centrele O_1 și O_2 ale cercurilor circumscrise triunghiurilor ABC și ABM.		
Etapе ale rezolvării cu barem de evaluare		
Pasul	Etapе ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Menționarea celor două cazuri analizate.	1
2	Obținerea egalității $BC^2 = AC \cdot MC$ și concluzionarea faptului că BC este tangentă la cercul cu centrul în O_2 , circumscris triunghiului ΔABM .	1
3	Obținerea $DO_1 \perp BC$ și $O_2B \perp BC$, unde D este mijlocul lui BC.	1
4	Menționarea faptului că segmentul [BD] de lungime $\frac{a}{2}$ este proiecția ortogonală a segmentului $[O_2O_1]$ pe dreapta (BC) și concluzionarea inegalității $O_2O_1 \geq \frac{a}{2}$.	1
5	Menționarea faptului că egalitatea are loc când $\angle B = 90^\circ$ și O_1 e mijlocul lui AC, O_2 este mijlocul lui AB, $BM \perp AC$.	1
6	Menționarea faptului că al doilea caz e analogic.	1
7	Valoarea cea mai mică a distanței dintre centrele O_1 și O_2 este egală cu $\frac{a}{2}$.	1
Punctaj total		7 puncte

Remarcă: Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.

11.5. În grădina zoologică trăiesc X hameleoni de culoare sură, 2022 de culoare albă și 100 de culoare roz, care pot să se întâlnească, dar doar câte doi. Dacă se întâlnesc 2 hameleoni de același culoare, atunci culorile lor nu se schimbă. Dacă se întâlnesc 2 hameleoni de diferite culori, atunci ei în același timp își schimbă culoarea în a 3-ia culoare. În ce condiții pentru X este posibilă situația că într-un moment dat toți hameleonii din grădina zoologică să devină de o culoare?

Etapе ale rezolvării cu barem de evaluare		
Pasul	Etapе ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Studierea numărului de hameleoni de diferite culori, ca triplet (a, b, c) . Găsirea variantelor de schimbare a tripletului inițial (a, b, c) după întâlnirea a 2 hameleoni.	1
2	Studierea a 3 diferențe a numărului de hameleoni de diferite culori înaintea întâlnirii a 2 hameleoni și după întâlnire (pe variante).	1
3	Demonstrarea faptului că cele 3 diferențe menționate sau nu se schimbă, sau se schimbă cu ± 3 .	1
4	Demonstrarea faptului că restul de la împărțirea celor 3 diferențe menționate la numărul 3 nu se schimbă după întâlnirea a 2 hameleoni.	1
5	Demonstrarea faptului că cele 3 diferențe inițiale sunt egale cu $(X - 2022)$, $(2022 - 100)$ și $(X - 100)$. Demonstrarea faptului că dacă la final toți hameleonii sunt de o culoare, atunci pentru triplete (a, b, c) vom avea: sau $(0, 0, M)$, sau $(0, M, 0)$, sau $(M, 0, 0)$. Demonstrarea faptului că atunci $X = 3m$ sau $X = 3m + 1$, $m \in \mathbb{N}$.	1
6.	Demonstrarea faptului că situația finală, când toți hameleonii sunt de o culoare, este posibilă.	2
	Punctaj total	7 puncte

Remarcă: Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.