

РЕСПУБЛИКАНСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

5 марта 2022 г., X класс

10.1. Действительные числа x, y, z и A удовлетворяют условию

$$A = \sqrt{\frac{1}{(2x-y-z)^2} + \frac{1}{(2y-z-x)^2} + \frac{1}{(2z-x-y)^2}}. \text{ Покажите, что если } x, y \text{ и } z \text{ рациональные}$$

числа, тогда и A рациональное число.

10.2. В треугольнике ABC , точка M является серединой стороны BC . На биссектрисе угла BAC взята точка N так, что $BN \perp AN$. Найдите длину стороны AC , если $AB = 10 \text{ см}$ и $MN = 2 \text{ см}$.

10.3. Решите на множестве \mathbb{R} уравнение $\sqrt{8x^2+10x-3} - \sqrt{8x+12} = 3 + \sqrt{4x+8} - \sqrt{4x^2+7x-2}$.

10.4. Дано множество $M = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(2f(x)+x) + f(x) = 4x-4\}$.

а) Покажите, что M является непустым множеством.

б) Найдите всевозможные значения $a \in \mathbb{R}$, где $f(a) = 0$ хотя бы для одной функции $f \in M$.

в) Найдите всевозможные значения $a \in \mathbb{R}$, где $f(a) = 0$ для всех функции $f \in M$.

10.5. Найдите значения действительного параметра m для которых уравнение

$$m(m+2) \cdot x^2 - (m-2) \cdot x(x^2+1) - 2(x^2+1)^2 = 0 \text{ имеет два различных действительных решения.}$$

Время работы: 240 минут.

Правильное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов. ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!

РЕСПУБЛИКАНСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

5 марта 2022 г., X класс

10.1. Действительные числа x, y, z и A удовлетворяют условию

$$A = \sqrt{\frac{1}{(2x-y-z)^2} + \frac{1}{(2y-z-x)^2} + \frac{1}{(2z-x-y)^2}}. \text{ Покажите, что если } x, y \text{ и } z \text{ рациональные}$$

числа, тогда и A рациональное число.

10.2. В треугольнике ABC , точка M является серединой стороны BC . На биссектрисе угла BAC взята точка N так, что $BN \perp AN$. Найдите длину стороны AC , если $AB = 10 \text{ см}$ и $MN = 2 \text{ см}$.

10.3. Решите на множестве \mathbb{R} уравнение $\sqrt{8x^2+10x-3} - \sqrt{8x+12} = 3 + \sqrt{4x+8} - \sqrt{4x^2+7x-2}$.

10.4. Дано множество $M = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(2f(x)+x) + f(x) = 4x-4\}$.

а) Покажите, что M является непустым множеством.

б) Найдите всевозможные значения $a \in \mathbb{R}$, где $f(a) = 0$ хотя бы для одной функции $f \in M$.

в) Найдите всевозможные значения $a \in \mathbb{R}$, где $f(a) = 0$ для всех функции $f \in M$.

10.5. Найдите значения действительного параметра m для которых уравнение

$$m(m+2) \cdot x^2 - (m-2) \cdot x(x^2+1) - 2(x^2+1)^2 = 0 \text{ имеет два различных действительных решения.}$$

Время работы: 240 минут.

Правильное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов. ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!