OLIMPIADA REPUBLICANĂ LA MATEMATICĂ
5 martie 2022, clasa a X – a

10.1. Numerele reale x, y, z și A verifică relația $A=\sqrt{\frac{1}{(2x-y-z)^2}+\frac{1}{(2y-z-x)^2}+\frac{1}{(2z-x-y)^2}}$.

Arătați că dacă x, y și z sunt numere raționale, atunci și A este un număr rațional.

10.2. În triunghiul ABC, punctul M este mijlocul laturii BC. Pe bisectoarea unghiului BAC se ia punct N astfel încât $BN \perp AN$. Determinați lungimea laturii AC, dacă $AB=10\,cm$ și $MN=2\,cm$.

10.3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt{8x^2+10x-3}-\sqrt{8x+12}=3+\sqrt{4x+8}-\sqrt{4x^2+7x-2}$.

10.4. Fie mulțimea $M=\left\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid f\left(2f(x)+x\right)+f(x)=4x-4\right\}$.

a) Arătați că mulțimea M nu este vidă.
b) Găsiți toate numerele $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(a)=0$ are loc pentru cel puțin o funcție $f\in M$.
c) Găsiți toate numerele $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(a)=0$ are loc pentru toate funcțiile $f\in M$.

10.5. Determinați valorile parametrului real m pentru care ecuația
$m(m+2)\cdot x^2-(m-2)\cdot x(x^2+1)-2(x^2+1)^2=0$ are două soluții reale distincte.

Timp de lucru: 240 minute.
Rezolvarea corectă a fiecărei probleme se apreciază cu 7 puncte. **MULT SUCCES !**

OLIMPIADA REPUBLICANĂ LA MATEMATICĂ
5 martie 2022, clasa a X – a

10.1. Numerele reale x, y, z și A verifică relația $A=\sqrt{\frac{1}{(2x-y-z)^2}+\frac{1}{(2y-z-x)^2}+\frac{1}{(2z-x-y)^2}}$.

Arătați că dacă x, y și z sunt numere raționale, atunci și A este un număr rațional.

10.2. În triunghiul ABC, punctul M este mijlocul laturii BC. Pe bisectoarea unghiului BAC se ia punct N astfel încât $BN \perp AN$. Determinați lungimea laturii AC, dacă $AB=10\,cm$ și $MN=2\,cm$.

10.3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt{8x^2+10x-3}-\sqrt{8x+12}=3+\sqrt{4x+8}-\sqrt{4x^2+7x-2}$.

10.4. Fie mulțimea $M=\left\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid f\left(2f(x)+x\right)+f(x)=4x-4\right\}$.

a) Arătați că mulțimea M nu este vidă.
b) Găsiți toate numerele $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(a)=0$ are loc pentru cel puțin o funcție $f\in M$.
c) Găsiți toate numerele $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(a)=0$ are loc pentru toate funcțiile $f\in M$.

10.5. Determinați valorile parametrului real m pentru care ecuația
$m(m+2)\cdot x^2-(m-2)\cdot x(x^2+1)-2(x^2+1)^2=0$ are două soluții reale distincte.

Timp de lucru: 240 minute.
Rezolvarea corectă a fiecărei probleme se apreciază cu 7 puncte. **MULT SUCCES !**