

# OLIMPIADA REPUBLICANĂ LA MATEMATICĂ

05 martie 2022, clasa a X-a

## SOLUȚII

**10.1.** Numerele reale  $x, y, z$  și  $A$  verifică relația  $A = \sqrt{\frac{1}{(2x-y-z)^2} + \frac{1}{(2y-z-x)^2} + \frac{1}{(2z-x-y)^2}}$ .

Arătați că dacă  $x, y$  și  $z$  sunt numere raționale, atunci și  $A$  este un număr rațional.

**Soluție.** Notăm  $2x - y - z = a, 2y - z - x = b, 2z - x - y = c$ .

Atunci  $a + b + c = 0$  și deoarece  $x, y, z \in \mathbb{Q}$ , avem  $a, b, c \in \mathbb{Q}$ . Mai mult,

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a+b+c}{abc} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2.$$

Deci  $A = \sqrt{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2} = \left|\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right| \in \mathbb{Q}$ .

**10.2.** În triunghiul  $ABC$ , punctul  $M$  este mijlocul laturii  $BC$ . Pe bisectoarea unghiului  $BAC$  se ia punctul  $N$  astfel încât  $BN \perp AN$ . Determinați lungimea laturii  $AC$ , dacă  $AB = 10\text{ cm}$  și  $MN = 2\text{ cm}$ .

**Soluție.** Fie  $BN \cap AC = \{L\}$ .

Distingem următoarele cazuri potențiale:

1. Dacă  $N \in (BC)$ , atunci  $AN$  este bisectoare și înălțime în  $\triangle ABC$ , adică și mediană. Prin urmare  $N \equiv M$ , ceea ce contrazice ipotezei  $MN = 2\text{ cm}$ . Cazul este imposibil.

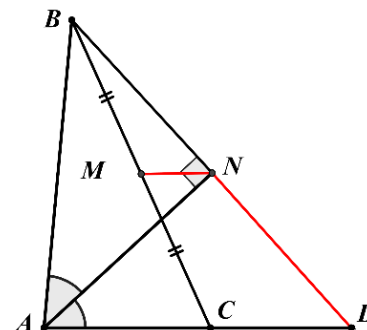
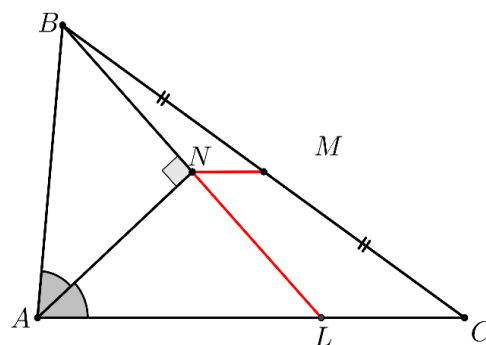
2. Presupunem că punctul  $N$  se află în interiorul  $\triangle ABC$ , adică  $L \in (AC)$ . Triunghiurile dreptunghice  $ABN$  și  $ALN$  sunt congruente, conform criteriului (CU), atunci  $BN = LN$  și  $AL = AB = 10\text{ cm}$ .

Deoarece  $N$  este mijlocul segmentului  $BL$ , iar  $M$  este mijlocul segmentului  $BC$ , atunci  $[MN]$  este linie mijlocie a  $\triangle BCL$ , deci  $CL = 2 \cdot MN = 4\text{ cm}$ , iar  $AC = AL + LC = 14\text{ cm}$ .

3. Presupunem că punctul  $N$  se află în exteriorul  $\triangle ABC$ , adică  $C \in (AL)$ , atunci în mod dual cazului 2, vom avea  $\triangle ABN \equiv \triangle ALN$ ,  $CL = 2 \cdot MN = 4\text{ cm}$ , iar  $AC = AL - CL = 6\text{ cm}$ .

Cazul 3 este posibil doar dacă  $MN < \frac{1}{2}AL = \frac{1}{2}AB$ , ceea ce se îndeplinește în această problemă.

Deci ambele cazuri, 2 și 3, sunt posibile și problema are două răspunsuri.



**Răspuns:** 14cm sau 6cm.

**10.3.** Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația  $\sqrt{8x^2+10x-3}-\sqrt{8x+12}=3+\sqrt{4x+8}-\sqrt{4x^2+7x-2}$ .

**Soluție.**

Ecuația din enunț este echivalentă cu ecuația  $\sqrt{(4x-1)(2x+3)}+\sqrt{(4x-1)(x+2)}-2\sqrt{2x+3}-2\sqrt{x+2}=3$ .

Vom avea  $DVA = \left[ \frac{1}{4}; +\infty \right)$ .

În continuare scriem ecuația sub forma

$$\sqrt{4x-1}(\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+2})-2(\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+2})=3 \Leftrightarrow (\sqrt{4x-1}-2)(\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+2})=3. \quad (1)$$

Deoarece  $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+2} > 0$  pentru orice  $x \in DVA$ , din (1) urmează, că  $\sqrt{4x-1}-2 > 0$ , adică  $x > \frac{5}{4}$ . Prin urmare, ecuația din enunț poate avea soluții doar pe intervalul  $\left( \frac{5}{4}; +\infty \right)$ .

Suma a două funcții strict crescătoare este o funcție strict crescătoare. Prin urmare, funcția  $f(x) = \sqrt{2x+3} + \sqrt{x+2}$  este strict crescătoare pe  $\left( \frac{5}{4}; +\infty \right)$ , în plus este și pozitivă. Funcția  $g(x) = \sqrt{4x-1} - 2$  de asemenea este o funcție strict crescătoare și pozitivă pe  $\left( \frac{5}{4}; +\infty \right)$ .

Produsul a două funcții pozitive și strict crescătoare este o funcție strict crescătoare, ceea ce reprezintă membrul stâng al ecuației (1), iar membrul drept al ecuației (1) este o constantă. Prin urmare, ecuația (1) are cel mult o soluție pe intervalul  $\left( \frac{5}{4}; +\infty \right)$ .

Observăm, că pentru  $x = 2 \in \left( \frac{5}{4}; +\infty \right)$  în (1) avem  $(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2) = 3$ , un adevăr.

Deci, unica soluție este  $x = 2$ .

**Răspuns:**  $S = \{2\}$ .

**10.4.** Fie mulțimea  $M = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(2f(x)+x) + f(x) = 4x-4\}$ .

- Arătați că mulțimea  $M$  nu este vidă.
- Găsiți toate numerele  $a \in \mathbb{R}$  astfel încât  $f(a) = 0$  are loc pentru cel puțin o funcție  $f \in M$ .
- Găsiți toate numerele  $a \in \mathbb{R}$  astfel încât  $f(a) = 0$  are loc pentru toate funcțiile  $f \in M$ .

**Soluție.** a) Să arătăm că funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x-1$  aparține mulțimii  $M$ . Într-adevăr,  $f(2f(x)+x) + f(x) = f(3x-2) + x-1 = 4x-4$ . Deci  $M \neq \emptyset$ .

b) Vom arăta cu mulțimea acestor valori  $a$  nu este vidă, adică există un zero pentru cel puțin o funcție din  $M$ . Pentru aceasta alegem o funcție  $f$  din  $M$ , anume  $f(x) = x-1$ . Această funcție are zeroul  $x = 1$ .

Vom arăta acum că orice funcție din  $M$  poate avea zero doar  $x = 1$ .

Fie funcția  $f \in M$  și  $x_0$  un zero al lui  $f$ , adică  $f(x_0) = 0$ . În relația  $f(2f(x)+x) + f(x) = 4x-4$  substituim  $x$  cu  $x_0$  și obținem  $4x_0 - 4 = f(2f(x_0)+x_0) + f(x_0) = f(x_0) + 0 = 0 \Rightarrow x_0 = 1$ . Prin urmare, orice funcție  $f \in M$  poate avea cel mult un zero, și anume  $x_0 = 1$ , adică  $a = 1$ . **Răspuns:**  $a = 1$ .

c) Vom arăta că  $x = 1$  este zero pentru orice funcție  $f \in M$ , adică are loc egalitatea  $f(1) = 0$ .

Fie  $f \in M$ . Notăm  $f(1) = b$ . Atunci  $f(2f(1)+1) + f(1) = 4-4 \Leftrightarrow f(2b+1) = -b$ .

În relația  $f(2f(x)+x) + f(x) = 4x-4$  substituind  $x$  cu  $2b+1$ , obținem:

$$f(2f(2b+1)+2b+1) + f(2b+1) = 4(2b+1) - 4 \Leftrightarrow f(-2b+2b+1) + f(2b+1) = 8b \Leftrightarrow b - b = 8b \Leftrightarrow b = 0.$$

Astfel, am arătat că funcțiile  $f \in M$  au un singur zero,  $x = 1$ . Deci  $a = 1$ .

**Răspuns:**  $a = 1$ .

**10.5.** Determinați toate valorile parametrului real  $m$  pentru care ecuația  $m(m+2) \cdot x^2 - (m-2) \cdot x(x^2+1) - 2(x^2+1)^2 = 0$  are două soluții reale distincte.

**Soluție.** Observăm că  $x=0$  nu este soluție a ecuației. Împărțind ambii membri ai ecuației la  $x^2$ , obținem ecuația echivalentă

$$2 \cdot \left( \frac{x^2+1}{x} \right)^2 + (m-2) \cdot \frac{x^2+1}{x} - m(m+2) = 0. \quad (1)$$

Notând  $\frac{x^2+1}{x} = t$ , obținem ecuația  $2t^2 + (m-2) \cdot t - m(m+2) = 0$ . (2)

Vom determina mulțimea valorilor lui  $t$ , adică mulțimea  $E(f)$  a valorilor funcției  $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x}.$$

$$\frac{x^2+1}{x} = t \Leftrightarrow x^2 - tx + 1 = 0. \quad \text{Calculăm } \Delta(t) = t^2 - 4.$$

$t \in E(f)$  dacă și numai dacă  $\Delta(t) \geq 0 \Leftrightarrow t \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$ , atunci  $E(f) = (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$ .

(sau  $t = x + \frac{1}{x}$ , de unde pentru  $x$  pozitiv avem  $t \geq 2$ , iar pentru  $x$  negativ avem  $t \leq -2$ .)

- Pentru fiecare valoare  $t = 2$  sau  $t = -2$  ecuația  $\frac{x^2+1}{x} = t$  are câte o singură soluție reală. Ecuația (1) va avea două soluții reale dacă ambele numere  $t = 2$  sau  $t = -2$  sunt simultan soluții ale ecuației (2). Aceasta are loc pentru  $m = 2$ .

- Pentru orice valoare  $t < -2$  sau  $t > 2$  ecuația  $\frac{x^2+1}{x} = t$  are câte două soluții reale.

Pentru ecuația (2) calculăm  $\Delta(m) = (m-2)^2 + 8m(m+2) = 9m^2 + 12m + 4 = (3m+2)^2 \geq 0$ , de unde

ecuația (2) are oricând soluțiile reale  $\begin{cases} t = -m, \\ t = \frac{m+2}{2}. \end{cases}$

1) Fie  $m = -\frac{2}{3}$ . Atunci ecuația (2) are o singură soluție  $t = \frac{2}{3} \notin (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$ . Deci în acest caz ecuația (1) nu are soluții reale.

2) Fie  $m \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{2}{3}; 2 \right\}$ . Atunci ecuația (1) va avea două soluții reale distincte, dacă ecuația (2) are doar o soluție pe intervalul  $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$ , iar altă soluție se află pe intervalul  $(-2; 2)$ .

$$\text{Deci } \begin{cases} \begin{cases} -m \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty) \\ \frac{m+2}{2} \in (-2; 2) \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{m+2}{2} \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty) \\ -m \in (-2; 2) \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} m \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty) \\ m \in (-6; 2) \end{cases} \\ \begin{cases} m \in (-\infty; -6) \cup (2; +\infty) \\ m \in (-2; 2) \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-6; -2) \\ m \in \emptyset \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-6; -2).$$

**Răspuns:**  $m \in (-6; -2) \cup \{2\}$ .