# Республиканская Олимпиада по Математике
## 5 марта 2022 г., X-й класс

### Схема оценивания

**10.1.** Действительные числа $x$, $y$, $z$ и $A$ удовлетворяют условию

$$A=\sqrt{\frac{1}{(2x-y-z)^2}+\frac{1}{(2y-z-x)^2}+\frac{1}{(2z-x-y)^2}}.$$ Покажите, что если $x$, $y$ и $z$ рациональные числа, тогда и $A$ рациональное число.

**Этапы решения со схемой распределения баллов**

| Шаг | Этапы решения | Количество баллов |
|---|---|---|
| 1 | Обозначение $2x-y-z=a,\ 2y-z-x=b,\ 2z-x-y=c$. | 1б. |
| 2 | Получение $a+b+c=0$ и $a, b, c\in\mathbb{Q}$. | 1б. |
| 3 | Получение $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2-2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)$. | 1б. |
| 4 | Получение $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2-2\cdot\frac{a+b+c}{abc}$. | 1б. |
| 5 | Получение $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2$. | 1б. |
| 6 | Получение $A=\sqrt{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}$. | 1б. |
| 7 | Получение $A=\left|\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right|\in\mathbb{Q}$. | 1р. |
| | Общее количество баллов | 7 баллов |

**Примечание**: Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.

**10.2.** В треугольнике $ABC$, точка $M$ является серединой стороны $BC$. На биссектрисе угла $BAC$ взята точка $N$ так, что $BN\perp AN$. Найдите длину стороны $AC$, если $AB=10\,см$ и $MN=2\,см$.

**Этапы решения со схемой распределения баллов**

| Шаг | Этапы решения | Количество баллов |
|---|---|---|
| 1 | Указывается, что существуют три случая расположения точки $N$: внутри $\triangle ABC$, вне $\triangle ABC$ и на стороне $BC$. | 1 б. |
| 2 | Исследуется случай: $N\in(BC)$. | 1 б. |
| 3 | Исследуется случай, когда точка $N$ находится внутри $\triangle ABC$:<br>1) Получение $AL=10\,см$. (1 б.)<br>2) Получение $CL=4\,см$. (1 б.)<br>3) Получение $AC=14\,см$. (1 б.) | 3 б. |
| 4 | Исследуется случай, когда точка $N$ находится вне $\triangle ABC$. | 2 б. |
| | Общее количество баллов | 7 баллов |

**Примечание**: Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.

| **10.3.** Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $\sqrt{8x^2+10x-3}-\sqrt{8x+12}=3+\sqrt{4x+8}-\sqrt{4x^2+7x-2}$. | | |
|---|---|---|
| **Этапы решения со схемой распределения баллов** | | |
| **Шаг** | **Этапы решения** | **Количество баллов** |
| 1 | Получение $\sqrt{(4x-1)(2x+3)}+\sqrt{(4x-1)(x+2)}-2\sqrt{2x+3}-2\sqrt{x+2}=3$ и $ОДЗ=\left[\frac{1}{4};+\infty\right)$. | 1 б. |
| 2 | Получение равносильного уравнения $\left(\sqrt{4x-1}-2\right)\left(\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+2}\right)=3$. **(1)** | 1 б. |
| 3 | Получение $x\in\left(\frac{5}{4};+\infty\right)$. | 1 б. |
| 4 | Указывается, что функции $f(x)=\sqrt{4x-1}-2$ и $g(x)=\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+2}$ строго возрастают и положительны на $\left(\frac{5}{4};+\infty\right)$. | 1 б. |
| 5 | Указывается, что функция $f(x)\cdot g(x)$ в левой части уравнения (1) – строго возрастающая на $\left(\frac{5}{4};+\infty\right)$. | 1 б. |
| 6 | Делается вывод, что уравнение (1) имеет не более одного решения. | 1 б. |
| 7 | Упоминание, что $x=2\in\left(\frac{5}{4};+\infty\right)$ удовлетворяет уравнению (1) и получение решения $x=2$. | 1 б. |
| | Общее количество баллов | 7 баллов |

**Примечание**: Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.

| **10.4.** Дано множество $M=\left\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,\middle|\, f\left(2f(x)+x\right)+f(x)=4x-4\right\}$.<br>a) Покажите, что $M$ является непустым множеством.<br>b) Найдите всевозможные значения $a\in\mathbb{R}$, где $f(a)=0$ хотя бы для одной функции $f\in M$.<br>c) Найдите всевозможные значения $a\in\mathbb{R}$, где $f(a)=0$ для всех функции $f\in M$. | | |
|---|---|---|
| **Этапы решения со схемой распределения баллов** | | |
| **Шаг** | **Этапы решения** | **Количество баллов** |
| 1 | a) Приводится пример функции $f\in M$. | 2 б. |
| 2 | b) Показывается, что множество значений $a$ ненулевое. | 1 б. |
| 3 | b) Показывается, что нулём любой функции из $M$ может быть только $x=1$, то есть $a=1$. | 2 б. |
| 4 | c) Показывается, что нулём всех функции из $M$ может быть только $x=1$, то есть $a=1$. | 2 б. |
| | Общее количество баллов | 7 баллов |

**Примечание**: Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.

| **10.5.** Найдите значения действительного параметра $m$ для которых уравнение $m(m+2)\cdot x^2-(m-2)\cdot x(x^2+1)-2(x^2+1)^2=0$ имеет два различных действительных решения. | | |
|---|---|---|
| **Этапы решения со схемой распределения баллов** | | |
| **Шаг** | **Этапы решения** | **Количество баллов** |
| 1 | Отмечается, что $x\neq 0$ и получение эквивалентного уравнения $2\cdot\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2+(m-2)\cdot\frac{x^2+1}{x}-m(m+2)=0$ **(1).** | 1 б. |
| 2 | Обозначение $\frac{x^2+1}{x}=t$ и получение уравнения $2t^2+(m-2)\cdot t-m(m+2)=0$ **(2)**. | 1 б. |
| 3 | Получение $\frac{x^2+1}{x}\in(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$. | 1 б. |
| 4 | Получение, что для $t=2$ или $t=-2$ уравнение (1) имеет два различных действительных решения и получение $m=2$. | 1 б. |
| 5 | Исследуется $t\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$ и делается вывод, что уравнение (1) имеет два различных действительных решения когда уравнение (2) имеет единственное решение, откуда $m=-\frac{2}{3}$, но $t=\frac{2}{3}\notin(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$. | 1 б. |
| 6 | Исследуется $t\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$ и делается вывод, что уравнение (1) имеет два различных действительных решения когда уравнение (2) имеет два решения, из которых только одно принадлежит множеству $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$, и получается $m\in(-6;-2)$. | 2 б. |
| | Общее количество баллов | 7 баллов |

**Примечание**: Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.