

OLIMPIADA REPUBLICANĂ LA MATEMATICĂ

5 martie 2022, clasa a X-a

BAREM DE EVALUARE

10.1. Numerele reale x, y, z și A verifică relația $A = \sqrt{\frac{1}{(2x-y-z)^2} + \frac{1}{(2y-z-x)^2} + \frac{1}{(2z-x-y)^2}}$.
Arătați că dacă x, y și z sunt numere raționale, atunci și A este un număr rațional.

Rezolvare cu barem de evaluare		
Pasul	Etapă ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Se notează $2x - y - z = a, 2y - z - x = b, 2z - x - y = c$.	1p.
2	Se obține $a + b + c = 0$ și $a, b, c \in \mathbb{Q}$.	1p.
3	Se obține $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right)$.	1p.
4	Se obține $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a+b+c}{abc}$.	1p.
5	Se obține $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2$.	1p.
6	Se obține $A = \sqrt{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}$.	1p.
7	Se obține $A = \left \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right \in \mathbb{Q}$.	1p.
Punctaj total		7 puncte

Remarcă: Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.

10.2. În triunghiul ABC , punctul M este mijlocul laturii BC . Pe bisectoarea unghiului BAC se ia punct N astfel încât $BN \perp AN$. Determinați lungimea laturii AC , dacă $AB = 10\text{ cm}$ și $MN = 2\text{ cm}$.

Rezolvare cu barem de evaluare		
Pasul	Etapă ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Se determină 3 cazuri de poziționare ale punctului N : în interiorul $\triangle ABC$, în exteriorul $\triangle ABC$ și pe latura BC .	1p.
2	Se studiază cazul $N \in (BC)$.	1p.
3	Se studiază cazul când N se află în interiorul $\triangle ABC$: 1) Se determină $AL = 10\text{ cm}$. (1p) 2) Se determină $CL = 4\text{ cm}$. (1p) 3) Se determină $AC = 14\text{ cm}$. (1p)	3p.
4	Se studiază cazul când N se află în exteriorul $\triangle ABC$.	2p.
Punctaj total		7 puncte

Remarcă: Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.

10.3. Rezolvați în \mathbb{R} ecuația $\sqrt{8x^2+10x-3}-\sqrt{8x+12}=3+\sqrt{4x+8}-\sqrt{4x^2+7x-2}$.

Rezolvare cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Se obține $\sqrt{(4x-1)(2x+3)}+\sqrt{(4x-1)(x+2)}-2\sqrt{2x+3}-2\sqrt{x+2}=3$ cu $DVA=\left[\frac{1}{4};+\infty\right)$.	1p.
2	Se obține ecuația echivalentă $(\sqrt{4x-1}-2)(\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+2})=3$. (1)	1p.
3	Se obține că $x\in\left(\frac{5}{4};+\infty\right)$.	1p.
4	Se obține că fiecare factor din partea stângă a ecuației (1) este o funcție strict crescătoare și pozitivă pe $\left(\frac{5}{4};+\infty\right)$.	1p.
5	Se obține că partea stângă a ecuației (1) este o funcție strict crescătoare pe intervalul $\left(\frac{5}{4};+\infty\right)$.	1p.
6	Se obține că ecuația (1) are cel mult o soluție.	1p.
7	Se observă că $x=2\in\left(\frac{5}{4};+\infty\right)$ satisface ecuația (1) și se obține soluția $x=2$.	1p.
	Punctaj total	7 puncte

Remarcă: Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.

10.4. Fie mulțimea $M=\{f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}\mid f(2f(x)+x)+f(x)=4x-4\}$.

- Arătați că mulțimea M nu este vidă.
- Găsiți toate numerele $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(a)=0$ are loc pentru cel puțin o funcție $f\in M$.
- Găsiți toate numerele $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(a)=0$ are loc pentru toate funcțiile $f\in M$.

Rezolvare cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	a) Se arată un exemplu de funcție $f\in M$.	2p.
2	b) Se determină că mulțimea valorilor lui a nu este vidă.	1p.
3	b) Se obține că orice funcție din M poate avea zerou doar pe $x=1$, adică $a=1$.	2p.
4	c) Se obține că toate funcțiile $f\in M$ au un singur zerou $x=1$, adică $a=1$.	2p.
	Punctaj total	7 puncte

Remarcă: Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.

10.5. Determinați toate valorile parametrului real m pentru care ecuația $m(m+2) \cdot x^2 - (m-2) \cdot x(x^2+1) - 2(x^2+1)^2 = 0$ are două soluții reale distincte.

Rezolvare cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Se observă că $x \neq 0$ și se obține ecuația $2 \cdot \left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2 + (m-2) \cdot \frac{x^2+1}{x} - m(m+2) = 0$ (1).	1p.
2	Se notează $\frac{x^2+1}{x} = t$ și se obține ecuația $2t^2 + (m-2) \cdot t - m(m+2) = 0$ (2).	1p.
3	Se obține $\frac{x^2+1}{x} \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.	1p.
4	Se obține că pentru $t = 2$ sau $t = -2$ ecuația (1) are două soluții reale distincte când $m = 2$.	1p.
5	Se cercetează $t \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$ și se obține că ecuația (1) are două soluții reale distincte când ecuația (2) are o singură soluție, de unde $m = -\frac{2}{3}$, însă atunci $t = \frac{2}{3} \notin (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.	1p.
6	Se cercetează $t \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$ și se obține că ecuația (1) are două soluții reale distincte când ecuația (2) are două soluții, dintre care doar una să aparțină intervalului $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$, de unde $m \in (-6; -2)$.	2p.
	Punctaj total	7 puncte

Remarcă: Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.