Теоретический тур ORF 2023, 12 класс

Задача 1 (10,0 б.)

Решение

1A. (3,0 б.)

Используя законы Кирхгофа для зарядов и токов $RI = \frac{q_1}{C_1} - \frac{q_2}{C_2}, \dot{q}_1 = -\dot{q}_2 = -I(t)$ (1), (0,3 б.)

получим

$\dot{I}(t) = -I(t)/\tau, \quad \tau = RC, C = C_1C_2/(C_1 + C_2), \quad I(t) = I(0)\, exp(-t/\tau)\,, I(0) = U_0/R, q_1(0) = C_1U_0$ (0,2 б.)

Интегрируя уравнение $\dot{q}_1 = -I(t)$, получим $q_1(t) = U_0C(exp(-t/\tau) - 1) + C_1U_0$ (0,3 б.)

Аналогично находим $q_2(t) = \frac{C_2}{C_1}q_1(t) - C_2U_0\, exp(-t/\tau) = CU_0(1 - exp(-t/\tau))$ (0,2 б.)

В стационарном состоянии

$q_1(\infty) = U_0(C_1 - C) = U_0C_1^2/(C_1 + C_2), q_2(\infty) = U_0C = U_0C_1C_2//(C_1 + C_2)$.

Таким образом в стационарном состоянии выполняется соотношени $q_1(\infty)/C_1 = q_2(\infty)/C_2$.

Падение напряжения на обоих конденсаторах компенсируются в соответствии с уравнением (1).
Ток равен нулю.

2. Мощность тока равна $P = RI^2$, следовательно

а) $Q = RI_0^2\int_0^\infty e^{-2t/\tau}dt = RI_0^2\tau/2 = CU_0^2/2$. (1,0 б.)

При условии $C_1 = C_2 = C, Q = CU_0^2/4$.

Этот же результат можно получить из рассмотрения зарядов конденсаторов и их энергий. Начальная энергия первого конденсатора W_0 равна

$W_0 = C_1U_0^2/2,$ (0,3 б.) а конечная

$W_1 = q_1^2/2C_1 + q_2^2/2C_2 = U_0^2(C_1^3/(C_1 + C_2)^2 + C_1^2C_2/(C_1 + C_2)^2)/2 = U_0^2\big(C_1^2/(C_1 + C_2)\big)/2$ (0,5 б.)

Таким образом $Q = C_1U_0^2/2 - U_0^2\big(C_1^2/(C_1 + C_2)\big)/2 = CU_0^2/2$ (0,2 б.).

Теоретический тур ORF 2023, 12 класс

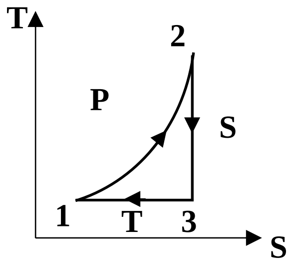
1B. (3,0 б.)

1. Адиабатический процесс $\delta Q = A_{23} - C_V \Delta T = 0, \Delta T = T_2 - T_3$ происходит при постоянной энтропии (на графике – отрезок прямой), (0,3 б.)

изотермический $A_{31} = Q_{31} = -T_1 \Delta S$, при постоянной температуре $T_1 = T_3$ (прямая). Изобара замыкает цикл $\delta Q = C_P dT = TdS, dT/dS = T/C_P$. (0,5 б.)

Тангенс угла наклона кривой $T(S)$ с ростом T увеличивается $d^2T/dS^2 = T/C_p^2$ (0,2 б.).

Цикл имеет вид



(0,2 б.)

2. Из уравнения изобарического процесса $dS/dT = C_P/T$ находим $\Delta S = C_P \ln\frac{T_2}{T_1}$. (0,5 б.)

Система получает тепло $Q^{(+)} = C_P(T_2 - T_1), C_P = \frac{5}{2}R$ и отдает $Q^{(-)} = -T_1 \Delta S$. (0,5 б.)

Закон сохранения энергии $A = C_P \Delta T - T_1 \Delta S = \eta Q^{(+)}$. (0,3 б.)

С другой стороны $T_2/T_1 = exp(\Delta S/C_P), \Delta S/C_P = 2,4$. (0,2 б.)

Таким образом находим $\eta = 1 - \frac{\frac{\Delta S}{C_P}}{exp(\Delta S/C_P) - 1} = 0,76$. Аналогично находим $\frac{T_2}{T_1} = 11$. (0,5 б.)

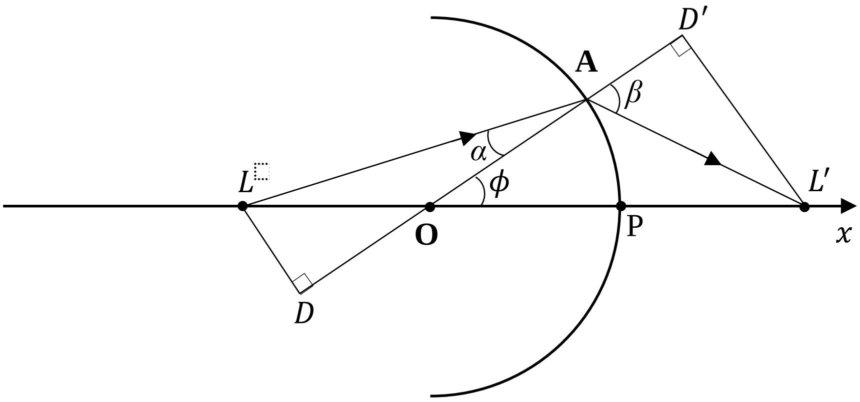
Теоретический тур ORF 2023, 12 класс

1C. (4,0 б.)

Уравнение сферического зеркала имеет вид $1/S + 1/S' = 2/R$. По условию $S = S' = R$.

Оптическая сила зеркала равна $\Phi = 2/R$. (0,3 б.)

Прямая $LOPL'$-главная оптическая ось.



(0,5 б.)

Ось Ox направлена вдоль распространения луча.

Начало отсчета в точке P пересечения со сферой.

Из рисунка следует, что $LD = LA\, sin\, \alpha = LO\, sin\, \phi$, (0,2 б.) аналогично

$L'D' = L'A\, sin\, \beta = L'O\, sin\, \phi$. (0,2 б.)

Для параксиальных лучей $LA = -x, LO = -x + R$ и $L'A = x', L'O = x' - R$. (0,2 б.)

Следовательно, находим

нулевой инвариант Аббе $n'\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{x'}\right) = n\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{x}\right)$ (0,4 б.)

или $\frac{n}{x} - \frac{n'}{x'} = \frac{(n-n')}{R} = \Phi$. (0,5 б.)

Здесь Φ оптическая сила плоско-выпуклой линзы (одной сферичекой поверхности). В нашем случае получим $\Phi = (n-1)/R$ (0,3 б.) . Полная оптическая сила системы равна $\Phi = 2(n-1)/R + 2/R = 2n/R$ (0,2 б.) , так как линзу луч света проходит дважды при отражении в зеркале.

Таким образом уравнение зеркала с жидкостью имеет вид $1/S + 1/S' = 2n/R$ (0,2 б.) .

В пределе $n = 1$ получим зеркало в воздухе.

Источник находится в точке $S = R$.

Избражение $S' = R - l$. Таким образом находим уравнение $1/(R - l) = (2n - 1)/R$ (0,5 б.) ,

из которого получим $n = (R - l/2)/(R - l)$ (0,5 б.) .

Теоретический тур ORF 2023, 12 класс

Задача 2 (10,0 б.)

Решение

2A. (4,0 б.)

Элементарный слой массой $dm = 4\pi r^2 \rho dr$ (0,5 б.)

притягивается к центру звезды с силой

$\gamma m(r) dm/r^2, m(r) = 4\pi r^3 \rho/3$ (0,5 б.).

Кроме того в том же направлении действует давление окружающих слоев звезды

$\big(P(r+dr) - P(r)\big)S = 4\pi r^2 dP$ (0,5 б.).

Следовательно $dP = -\gamma \rho^2 4\pi r dr/3$ (0,5 б.).

Решая это уравнение, находим $P(r) = -\gamma \rho^2 2\pi r^2/3 + C$ (0,5 б.).

Постоянную интегрирования найдем из условия на границе

$P(R) = 0,\ P(r) = \gamma \rho^2 2\pi (R^2 - r^2)/3$ (1,0 б.).

В центре зезды давление равно $P(0) = \gamma \rho^2 2\pi R^2/3$ (0,5 б.)

2B. (6,0 б.)

1. Введем вектор $\vec{r} = \vec{r}_A - \vec{r}_B$ (0,2 б.),

соединяющий точки A и B и направленный вдоль скорости $\vec{v}$ точки B.

Скорость $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_A - \dot{\vec{r}}_B = \vec{u} - \vec{v}$ (0,2 б.) характеризует, как сближение, так и вращение точки B.

Скорость сближения точек $\dot{r} = (\vec{u} \cdot \vec{v})/v - v = u \cos\phi - v$ (0,3 б.), (2) отрицательна, так как $r(t)$ изменяется от L до нуля.

Вращательная скорость равна $r\dot{\phi} = -u \sin\phi$ (3) (0,3 б.).

Вектор $\vec{r}$ имеет две проекции

$r(t)\cos\phi = ut - v\int_0^t \cos\phi(t)dt$, (0,3 б.) $r(t)\sin\phi = L - v\int_0^t \sin\phi(t)dt$ (0,3 б.).

Интегрируя уравнение (2), получим

$r(t) = L - vt + u\int_0^t \cos\phi(t)dt = L - vt + u\left(\frac{u}{v}t - \frac{r}{v}\cos\phi\right)$, $r(t) = \left(L - \frac{v^2-u^2}{v}t\right)\left(1 + \frac{u}{v}\cos\phi\right)^{-1}$ (4) (0,6 б.)

Используя уравнения (3) и (4) получим $r\dot{\phi} = -u\sin\phi = \dot{\phi}\left(L - \frac{v^2-u^2}{v}t\right)\left(1 + \frac{u}{v}\cos\phi\right)^{-1}$, (0,4 б.)или

$L\dot{\phi}\left(1 - \frac{v^2-u^2}{Lv}t\right) = -u\sin\phi\left(1 + \frac{u}{v}\cos\phi\right)$ (5) (0,3 б.)

Уравнение (5) может быть проинтегрировано, так как переменные ϕ, t разделяются.
В результате квадратуры можно получить уравнение (1).

С другой стороны, дифференцируя уравнение (1), приведем его к виду (5).
Действительно из (1) находим

$1 = -a\left(b\left(tg\frac{\phi}{2}\right)^{b-1}\frac{\cos^2\phi/2+\sin^2\phi/2}{2\cos^2\phi/2}\frac{b+\cos\phi}{b\sin\phi} - \left(tg\frac{\phi}{2}\right)^b\frac{\sin^2\phi+(b+\cos\phi)\cos\phi}{b\sin^2\phi}\right)\dot{\phi}$, (0,6 б.)

или $1 = -\frac{a\dot{\phi}}{\sin^2\phi}\left(tg\frac{\phi}{2}\right)^b\left(b + \cos\phi - \frac{1+b\cos\phi}{b}\right) = -\frac{a\dot{\phi}}{b\sin^2\phi}\left(tg\frac{\phi}{2}\right)^b(b^2-1)$. (0,4 б.)

Из уравнения (1) также

получим $1 - t/a = \left(tg\frac{\phi}{2}\right)^b\frac{b+\cos\phi}{b\sin\phi}$ (0,5 б.).

Умножая левую и правую части этого уравнения на $\dot{\phi}$ получим

$\dot{\phi}(1 - t/a) = -\frac{1}{a}\sin\phi\,(b+\cos\phi)(b^2-1)^{-1}$(6) (0,5 б.).

Уравнения (5) и (6) имеют качественно аналогичный вид, что доказывает правильность решения в виде (1). Более того уравнения (5) и (6) совпадают при значениях параметров

$a = \frac{Lv}{v^2-u^2}, b = v/u$ (0,1 б.) в уравнении (1).

3. Время встречи определяется уравнением (1) в пределе $\phi = 0. \left(tg\,\frac{\phi}{2}\right)^b \frac{b+\cos\phi}{b\sin\phi} = 0$, так как величина $b > 1, (u < v), \phi^{b-1} \to 0$ (0,7 б.)

При этом для времени встречи получим $t = a = \frac{Lv}{v^2-u^2}$ (0,3 б.)

Теоретический тур ORF 2023, 12 класс

Задача 3 (10,0 б.)

Решение

3A. (6,0 б.)

Уравнения Кирхгофа для первого и второго контура имют вид

$L_1\ddot{q}_1 + R_1\dot{q}_1 + \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_1-q_2}{C} = u_0 \cos\omega t$ и $L_2\ddot{q}_2 + R_2\dot{q}_2 + \frac{q_2}{C_2} - \frac{q_1-q_2}{C} = 0$ (0,3 б.).

Вычисляя производные по времени и объединяя уравнения, получим

$-L_i\omega^2 q_i - \omega R_i(a_i \sin\omega t - b_i \cos\omega t) + \frac{q_i}{C_i} \pm \frac{q_1-q_2}{C} = \delta_{i1}u_0 \cos\omega t, \delta_{ik} = 0, i \neq k, \delta_{ik} = 1, i = k,$

символ Кронекера (0,4 б.).

Собирая слагаемые с общим множителем $\cos\omega t$ и $\sin\omega t$ получим систему уравнений

$\left(-L_i\omega^2 a_i + \omega R_i b_i + \frac{a_i}{C_i} \pm \frac{a_1-a_2}{C} - u_0\delta_{i1}\right)\cos\omega t + \left(-L_i\omega^2 b_i - \omega R_i a_i + \frac{b_i}{C_i} \pm \frac{b_1-b_2}{C}\right)\sin\omega t = 0$ (0,3 б.)

Система уравнений должна иметь решение при произвольном значении t по условию, следовательно множители при $\cos\omega t$ и при $\sin\omega t$ каждый должны быть равны нулю.
Получаем систему четырех уравнений.

Множитель при $\sin\omega t$обращается в ноль при условии

$a_i = (b_i(1/C_i + 1/C - L_i\omega^2) - b_k/C)/\omega R_i, k \neq i$ (0,3 б.).

Введем обозначения $1/C_i + 1/C = 1/\tilde{C}_i, \omega_i^{-2} = \tilde{C}_i L_i, \tau_i = \tilde{C}_i R_i$ (0,2 б.)

Получим $a_i = \left(b_i(1 - (\omega/\omega_i)^2) - b_k\tilde{C}_i/C\right)/\omega\tau_i, k \neq i$ (0,3 б.)

Множитель при $\cos\omega t$ приводит к уравнениям

$a_i(1 - (\omega/\omega_i)^2) - a_k\tilde{C}_i/C + \omega\tau_i b_i = u_0\tilde{C}_i\delta_{i1} = q_0\delta_{i1}, q_0 = u_0\tilde{C}_1$ (0,2 б.)

Используя полученные уравнения

$a_1 = \left(b_1(1 - (\omega/\omega_1)^2) - b_2\tilde{C}_1/C\right)/\omega\tau_1, a_2 = \left(b_2(1 - (\omega/\omega_2)^2) - b_1\tilde{C}_2/C\right)/\omega\tau_2$ (0,5 б.),

находим подстановкой

$(1-(\omega/\omega_1)^2)\big(b_1(1-(\omega/\omega_1)^2)-b_2\tilde{C}_1/C\big)/\omega\tau_1-\tilde{C}_1/C\big(b_2(1-(\omega/\omega_2)^2)-b_1\tilde{C}_2/C\big)/\omega\tau_2+\omega\tau_1 b_1=q_0$ (0,3 б.)

$b_1\left((1-(\omega/\omega_1)^2)^2+\frac{\tilde{C}_i\tilde{C}_2}{C^2}+(\omega\tau_1)^2\right)/\omega\tau_1-b_2(\tilde{C}_1/C)\big((1-(\omega/\omega_i)^2)/\omega\tau_i+(1-(\omega/\omega_k)^2)/\omega\tau_k\big)_i=q_0, \frac{\tilde{C}_i\tilde{C}_2}{C^2}=C_{i2}$ (0,2 б.),

Аналогично

$(1-(\omega/\omega_2)^2)\big(b_2(1-(\omega/\omega_2)^2)-b_1\tilde{C}_2/C\big)/\omega\tau_2-\tilde{C}_2/C\big(b_1(1-(\omega/\omega_1)^2)-b_2\tilde{C}_1/C\big)/\omega\tau_1+\omega\tau_2 b_2=0$ (0,3 б.)

$b_2\left((1-(\omega/\omega_2)^2)^2+\frac{\tilde{C}_i\tilde{C}_2}{C^2}+(\omega\tau_2)^2\right)/\omega\tau_2=b_1(\tilde{C}_2/C)\big((1-(\omega/\omega_1)^2)/\omega\tau_1+(1-(\omega/\omega_2)^2)/\omega\tau_2\big)$ (0,3 б.) или, объединяя, находим

$b_i\big((1-(\omega/\omega_i)^2)^2+\tilde{C}_i\tilde{C}_k/C^2+(\omega\tau_i)^2\big)/\omega\tau_i-b_k\frac{\tilde{C}_i}{C}\big((1-(\omega/\omega_i)^2)/\omega\tau_i+(1-(\omega/\omega_k)^2)/\omega\tau_k\big)=q_0\delta_{i1}$ (0,4 б.)

Введем обозначения

$D_i=\big((1-(\omega/\omega_i)^2)^2+\tilde{C}_{12}+(\omega\tau_i)^2\big)/\omega\tau_i, B=(1-(\omega/\omega_1)^2)/\omega\tau_1+(1-(\omega/\omega_2)^2)/\omega\tau_2$ (0,3 б.)

Таким образом $b_2=b_1\frac{\tilde{C}_2 B}{CD_2}, b_1=q_0D_2/(D_{12}-C_{12}B^2), D_{12}=D_2D_1$ (1) (0,3 б.).

Постоянные интегрирования

$a_1=\big(b_1(1-(\omega/\omega_1)^2)-b_2\tilde{C}_1/C\big)/\omega\tau_1, a_2=\big(b_2(1-(\omega/\omega_2)^2)-b_1\tilde{C}_2/C\big)/\omega\tau_2$ (2) определяют сигнал, который может быть измерен на сопротивлениях R_2, R_1 либо на C_2, C_1. $q_i(t)=\sqrt{a_i^2+b_i^2}\,cos(\omega t-\phi_i)\,, tg\phi_i=b_i/a_i$ (0,4 б.).

Введем обозначения $\omega/\omega_1=x, \omega_1\tau_i=t_i$, с использованием которых уравнения (1, 2) принимают вид

$b_2=b_1\frac{\tilde{C}_2 B}{CD_2}, b_1=q_0D_2/(D_{12}-C_{12}B^2)$ (0,3 б.),

$a_1 = \left(b_1(1-x^2) - b_2\tilde{C}_1/C\right)/xt_1,\ a_2 = \left(b_2(1-(tx)^2) - b_1\tilde{C}_2/C\right)/xt_2, t = \omega_1/\omega_2$ (3) (0,2 б.)

$$D_1 = \frac{\left((1-x^2)^2 + \tilde{C}_{12} + (xt_1)^2\right)}{xt_1}, \quad (0{,}2\ \text{б.}) \quad D_2 = \frac{\left((1-(tx)^2)^2 + \tilde{C}_{12} + (xt_2)^2\right)}{xt_2}, (0{,}2\ \text{б.})$$

$$B = \frac{(1-x^2)}{xt_1} + \frac{(1-(tx)^2)}{xt_2} \quad (0{,}1\ \text{б.})$$

3B. (4,0 б.)

Используя графики определим параметры $t = \sqrt{L_2C_2(C_1+C)/L_1C_1(C_2+C)}$ и $C_2/(C+C_2)$.

Согласно графику функция $a_2(x)$ обращается в ноль в двух точках

$x_1 = 0{,}605 \pm 0{,}001$ (0,3 б.)и в точке

$x_2 = 1{,}055 \pm 0{,}001$ (0,2 б.).

Функция $a_2(x)$ равна нулю при условии $b_2(x)(1-(tx)^2) = b_1(x)\tilde{C}_2/C$ (0,5 б.).

Используя графики, находим $b_1(0{,}605) = 1{,}92, b_1(1{,}05) = 2{,}92$ (0,5 б.)

и $b_2(0{,}605) = 10{,}98, b_2(1{,}05) = -1{,}96$ (0,5 б.).

В соответствии с этими данными получим два уравнения для параметров $t = \omega_1/\omega_2$ и $c = \tilde{C}_2/C$

$c = (1 - t^2 0{,}605^2)10{,}98/1{,}92$ (0,5 б.).

и $c = -(1 - t^2 1{,}05^2)1{,}96/2{,}92$, $c = (1 - t^2 0{,}366)5{,}72$ и $c = -(1 - t^2 1{,}1)0{,}67$ (0,5 б.).

$$(1 - t^2 0{,}366)5{,}72 + (1 - t^2 1{,}1)0{,}67 = 0{,}639 = t^2(2{,}09 + 0{,}737) = 2{,}827t^2,$$
$$t^2 = 2{,}26, t = 1{,}503 \pm 0{,}002 \quad (0{,}4\ \text{б.}).$$

Используя значение параметра $t = 1{,}5$, находим

$$c = (1 - 2{,}25 \cdot 0{,}366)5{,}72 = 1{,}009$$

и из второго уравнения $c = -(1 - 2{,}25 \cdot 1{,}1)0{,}67 = 0{,}988$ (0,4 б.)..

Таким образом с точностью до одного процента $t = 1{,}5, \tilde{C}_2/C = 1{,}0$ (0,2 б.).