OLIMPIADA REPUBLICANĂ LA FIZICĂ, EDIȚIA LVII

CHIȘINĂU, 17– 20, martie 2023

Proba teoretică ORF 2023, clasa a 12

Problemă 1 (10,0 p.)

Soluție

1A. (3,0 p.)

Folosind legile lui Kirchhoff: $RI = \frac{q_1}{C_1} - \frac{q_2}{C_2}, \dot{q}_1 = -\dot{q}_2 = -I(t)$ (1), (0,3 p.)

Obținem:

$\dot{I}(t) = -I(t)/\tau, \quad \tau = RC, C = C_1C_2/(C_1 + C_2), \quad I(t) = I(0)\, exp(-t/\tau)\,, I(0) = U_0/R, q_1(0) = C_1U_0$ (0,2 p.)

Integrând ecuația $\dot{q}_1 = -I(t)$, obținem $q_1(t) = U_0C(exp(-t/\tau) - 1) + C_1U_0$ (0,3 p.)

Analogic găsim $q_2(t) = \frac{C_2}{C_1}q_1(t) - C_2U_0\, exp(-t/\tau) = CU_0(1 - exp(-t/\tau))$ (0,2 p.)

În stare staționară

$q_1(\infty) = U_0(C_1 - C) = U_0C_1^2/(C_1 + C_2), q_2(\infty) = U_0C = U_0C_1C_2//(C_1 + C_2)$.

Astfel în stare staționară este realizată relația $q_1(\infty)/C_1 = q_2(\infty)/C_2$.

Căderea de tensiune pe ambii condensatori este compensată în corespundere cu ecuația (1).
Curentul este egal cu zero.

2. Puterea curentului electric este $P = RI^2$, și ca urmare

a) $Q = RI_0^2 \int_0^\infty e^{-2t/\tau} dt = RI_0^2\tau/2 = CU_0^2/2$. (1,0 p.)

Reieșind din condiția $C_1 = C_2 = C, Q = CU_0^2/4$.

Același rezultat îl putem obține reieșind din analiza sarcinilor condensatoarelor și energiilor acestora. Energia inițială a primului condensator W_0 este

$W_0 = C_1U_0^2/2$, (0,3 p.) iar finală

$W_1 = q_1^2/2C_1 + q_2^2/2C_2 = U_0^2(C_1^3/(C_1 + C_2)^2 + C_1^2C_2/(C_1 + C_2)^2)/2 = U_0^2\big(C_1^2/(C_1 + C_2)\big)/2$ (0,5 p.)

Astfel $Q = C_1U_0^2/2 - U_0^2\big(C_1^2/(C_1 + C_2)\big)/2 = CU_0^2/2$ (0,2 p.).

Proba teoretică ORF 2023, clasa a 12

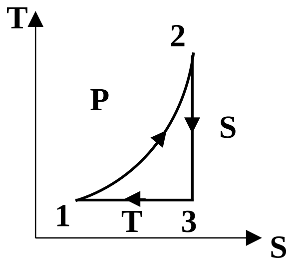
1B. (3,0 p.)

1. Procesul adiabatic $\delta Q = A_{23} - C_V \Delta T = 0, \Delta T = T_2 - T_3$ are loc la entropie constantă (în grafic – segment de dreaptă), (0,3 p.)

Procesul izotermic $A_{31} = Q_{31} = -T_1 \Delta S$, la temperatura constantă $T_1 = T_3$ (dreapta). Izobara este ultima componentă a ciclului $\delta Q = C_P dT = T dS, dT/dS = T/C_P$. (0,5 p.)

Tangenta unghiului de înclinare a curbei $T(S)$ se mărește odată cu T: $d^2T/dS^2 = T/C_p^2$ (0,2 p.).

Ciclul are forma:



(0,2 p.)

2. Reieșind din ecuația procesului izobar $dS/dT = C_P/T$ gasim $\Delta S = C_P \ln\frac{T_2}{T_1}$. (0,5 p.)

Sistemul primește căldura: $Q^{(+)} = C_P(T_2 - T_1), C_P = \frac{5}{2}R$ și cedează căldura $Q^{(-)} = -T_1 \Delta S$. (0,5 p.)

Legea conservării energiei $A = C_P \Delta T - T_1 \Delta S = \eta Q^{(+)}$. (0,3 p.)

Pe de altă parte $T_2/T_1 = exp(\Delta S/C_P), \Delta S/C_P = 2{,}4$. (0,2 p.)

Astfel găsim $\eta = 1 - \frac{\frac{\Delta S}{C_P}}{exp(\Delta S/C_P) - 1} = 0{,}76$. Analogic: $\frac{T_2}{T_1} = 11$. (0,5 p.)

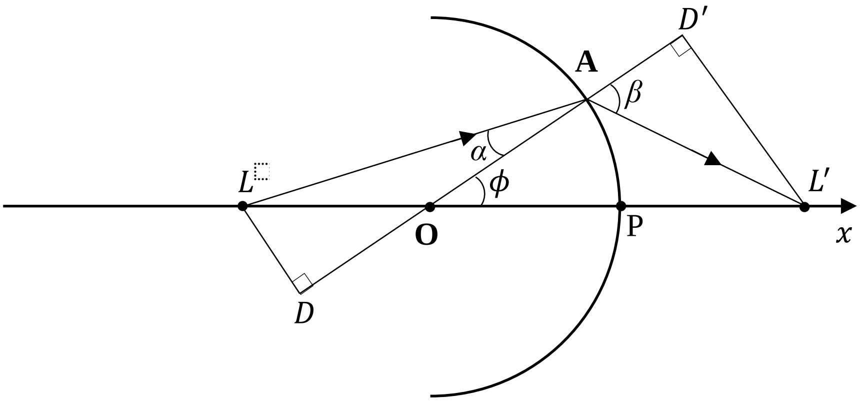
Proba teoretică ORF 2023, clasa a 12

1C. (4,0 p.)

Ecuația oglinzii sferice are forma $1/S + 1/S' = 2/R$. Reieșind din condiție - $S = S' = R$.

Puterea optică a oglinzii este равна $\Phi = 2/R$. (0,3 p.)

Dreapta $LOPL'$- este axa optică principală.



(0,5 p.)

Axa Ox este îndreptată de-a lungul răspândirii razei de lumină.

Punctul de referință P este la intersecția axei cu sfera.

Din figură rezultă că $LD = LA \sin\alpha = LO \sin\phi$, (0,2 p.) analogic

$L'D' = L'A \sin\beta = L'O \sin\phi$. (0,2 p.)

Pentru razele paraxiale $LA = -x, LO = -x + R$ и $L'A = x', L'O = x' - R$. (0,2 p.)

Astfel găsim invarianta nulă a lui Abbe $n'\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{x'}\right) = n\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{x}\right)$ (0,4 p.)

sau $\frac{n}{x} - \frac{n'}{x'} = \frac{(n-n')}{R} = \Phi$. (0,5 p.)

Aici Φ este puterea optică a lentilei lentilă plan-convexă (a unei suprafețe sferice). În cazul dat obținem $\Phi = (n-1)/R$ (0,3 p.) . Puterea optică totală a sistemului este $\Phi = 2(n-1)/R + 2/R = 2n/R$ (0,2 p.) ,

Deoarece raza de lumină trece de două ori prin lentilă la reflexia în oglindă.

Astfel ecuația oglinzii cu lichid are forma $1/S + 1/S' = 2n/R$ (0,2 p.) .

În limita $n = 1$ este oglinda în aer.

Sursa se află în punctul $S = R$.

Imaginea $S' = R - l$. Astfel găsim ecuația $1/(R - l) = (2n - 1)/R$ (0,5 p.) ,

Din care obținem $n = (R - l/2)/(R - l)$ (0,5 p.) .

Proba teoretică ORF 2023, clasa a 12

Problemă 2 (10,0 p.)

Soluție

2A. (4,0 p.)

Stratul elementar de masă $dm = 4\pi r^2 \rho dr$ (0,5 p.)

Este atras spre centru stelei cu forța

$\gamma m(r) dm / r^2, m(r) = 4\pi r^3 \rho / 3$ (0,5 p.).

Înafară de aceasta, în aceeași direcție acționează presiunea straturilor înconjurătoare a stelei

$\big(P(r+dr) - P(r)\big)S = 4\pi r^2 dP$ (0,5 p.).

Ca urmare $dP = -\gamma \rho^2 4\pi r dr/3$ (0,5 p.).

Rezolvând această ecuație, găsim: $P(r) = -\gamma \rho^2 2\pi r^2/3 + C$ (0,5 p.).

Constanta de integrare o găsim din condiția de frontieră

$P(R) = 0,\ P(r) = \gamma \rho^2 2\pi (R^2 - r^2)/3$ (1,0 p.).

In centru stelei presiunea este $P(0) = \gamma \rho^2 2\pi R^2/3$ (0,5 p.)

2B. (6,0 p.)

1. Introducem un vector $\vec{r} = \vec{r}_A - \vec{r}_B$ (0,2 p.),

ce unește punctele A și B și e orientat de-a lungul vitezei $\vec{v}$ a punctului B.

Viteza $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_A - \dot{\vec{r}}_B = \vec{u} - \vec{v}$ (0,2 p.) caracterizează atât apropierea, cât și rotirea punctului B.

Viteza de apropiere a punctelor este negativă $\dot{r} = (\vec{u} \cdot \vec{v})/v - v = u\cos\phi - v$ (0,3 p.), (2), deoarece $r(t)$ se schimbă de la L până la zero.

Viteza de rotație este $r\dot{\phi} = -u\sin\phi$ (3) (0,3 p.).

Vectorul $\vec{r}$ are două proiecții

$r(t)\cos\phi = ut - v\int_0^t \cos\phi\,(t)dt$, (0,3 p.) $r(t)\sin\phi = L - v\int_0^t \sin\phi\,(t)dt$ (0,3 p.).

Integrând ecuația (2), obținem

$r(t) = L - vt + u\int_0^t \cos\phi\,(t)dt = L - vt + u\left(\frac{u}{v}t - \frac{r}{v}\cos\phi\right)$, $r(t) = \left(L - \frac{v^2-u^2}{v}t\right)\left(1 + \frac{u}{v}\cos\phi\right)^{-1}$ (4) (0,6 p.)

Folosind ecuațiile (3) și (4) obținem $r\dot{\phi} = -u\sin\phi = \dot{\phi}\left(L - \frac{v^2-u^2}{v}t\right)\left(1 + \frac{u}{v}\cos\phi\right)^{-1}$, (0,4 p.) sau

$L\dot{\phi}\left(1 - \frac{v^2-u^2}{Lv}t\right) = -u\sin\phi\left(1 + \frac{u}{v}\cos\phi\right)$ (5) (0,3 p.)

Ecuația (5) se integrează - mărimile ϕ, t sunt separabile.
În rezultat putem obține ecuația (1).

Diferențiind ecuația (1), o aducem la forma (5). Într-adevăr din (1) găsim:

$1 = -a\left(b\left(tg\frac{\phi}{2}\right)^{b-1}\frac{\cos^2\phi/2 + \sin^2\phi/2}{2\cos^2\phi/2}\frac{b+\cos\phi}{b\sin\phi} - \left(tg\frac{\phi}{2}\right)^b\frac{\sin^2\phi + (b+\cos\phi)\cos\phi}{b\sin^2\phi}\right)\dot{\phi}$, (0,6 p.)

sau $1 = -\frac{a\dot{\phi}}{\sin^2\phi}\left(tg\frac{\phi}{2}\right)^b\left(b + \cos\phi - \frac{1+b\cos\phi}{b}\right) = -\frac{a\dot{\phi}}{b\sin^2\phi}\left(tg\frac{\phi}{2}\right)^b(b^2-1)$. (0,4 p.)

Din ecuația (1) obținem $1 - t/a = \left(tg\frac{\phi}{2}\right)^b\frac{b+\cos\phi}{b\sin\phi}$ (0,5 p.).

Înmulțind părțile stînga și dreapta ale acestei ecuații cu $\dot{\phi}$ obținem

$\dot{\phi}(1 - t/a) = -\frac{1}{a}\sin\phi\,(b + \cos\phi)(b^2-1)^{-1}$(6) (0,5 p.).

Ecuațiile (5) și (6) au din punct de vedere calitatice o formă analogică, ce demonstrează corectitudinea soluției sub forma (1). Mai mult ca atât, ecuațiile (5) și (6) coincid pentru următorii parametri:

$a = \frac{Lv}{v^2-u^2}, b = v/u$ (0,1 p.) în ecuația (1).

3. Timpul întâlnirii este determinat de ecuația (1) în limita $\phi = 0. \left(tg\,\frac{\phi}{2}\right)^{b} \frac{b+\cos\phi}{b\sin\phi} = 0$, căci mărimea $b > 1, (u < v), \phi^{b-1} \rightarrow 0$ (0,7 p.)

În aceste caz pentru timpul de întâlnire obținem $t = a = \frac{Lv}{v^2-u^2}$ (0,3 p.)

Proba teoretică ORF 2023, clasa a 12

Problemă 3 (10,0 p.)

Soluție

3A. (6,0 p.)

Ecuațiile Kirchhoff pentru primul și al doilea contur au forma

$L_1\ddot{q}_1 + R_1\dot{q}_1 + \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_1-q_2}{C} = u_0 \cos\omega t$ и $L_2\ddot{q}_2 + R_2\dot{q}_2 + \frac{q_2}{C_2} - \frac{q_1-q_2}{C} = 0$ (0,3 p.).

Calculând derivatele după timp și unind ecuațiile obținem

$-L_i\omega^2 q_i - \omega R_i(a_i \sin\omega t - b_i \cos\omega t) + \frac{q_i}{C_i} \pm \frac{q_1-q_2}{C} = \delta_{i1}u_0 \cos\omega t, \delta_{ik} = 0, i \neq k, \delta_{ik} = 1, i = k,$

Simbolul Kronecker (0,4 p.).

Grupând termenii de pe lângă factorii comuni $\cos\omega t$ și $\sin\omega t$ obținem sistemul de ecuații

$\left(-L_i\omega^2 a_i + \omega R_i b_i + \frac{a_i}{C_i} \pm \frac{a_1-a_2}{C} - u_0\delta_{i1}\right)\cos\omega t + \left(-L_i\omega^2 b_i - \omega R_i a_i + \frac{b_i}{C_i} \pm \frac{b_1-b_2}{C}\right)\sin\omega t = 0$ (0,3 p.)

Sistemul de ecuații trebuie să aibă soluții pentru oricare valoare t, conform condiției, deci factorii de pe lângă $\cos\omega t$ și $\sin\omega t$ trebuie să fie egal cu zero.
Obținem un sistem din patru ecuații.

Factorul de pa lângă $\sin\omega t$ devine egal cu zero în condiția

$a_i = (b_i(1/C_i + 1/C - L_i\omega^2) - b_k/C)/\omega R_i, k \neq i$ (0,3 p.).

Introducem notările $1/C_i + 1/C = 1/\tilde{C}_i, \omega_i^{-2} = \tilde{C}_i L_i, \tau_i = \tilde{C}_i R_i$ (0,2 p.)

Obținem $a_i = \left(b_i(1 - (\omega/\omega_i)^2) - b_k\tilde{C}_i/C\right)/\omega\tau_i, k \neq i$ (0,3 p.)

Factorul de pa lângă $\cos\omega t$ rezultă în ecuațiile

$a_i(1 - (\omega/\omega_i)^2) - a_k\tilde{C}_i/C + \omega\tau_i b_i = u_0\tilde{C}_i\delta_{i1} = q_0\delta_{i1}, q_0 = u_0\tilde{C}_1$ (0,2 p.)

Folosind ecuațiile obținute

$a_1 = \left(b_1(1 - (\omega/\omega_1)^2) - b_2\tilde{C}_1/C\right)/\omega\tau_1, a_2 = \left(b_2(1 - (\omega/\omega_2)^2) - b_1\tilde{C}_2/C\right)/\omega\tau_2$ (0,5 p.),

găsim prin substituție

$(1-(\omega/\omega_1)^2)\big(b_1(1-(\omega/\omega_1)^2)-b_2\tilde{C}_1/C\big)/\omega\tau_1-\tilde{C}_1/C\big(b_2(1-(\omega/\omega_2)^2)-b_1\tilde{C}_2/C\big)/\omega\tau_2+\omega\tau_1 b_1=q_0$ (0,3 p.)

$b_1\left((1-(\omega/\omega_1)^2)^2+\frac{\tilde{C}_i\tilde{C}_2}{C^2}+(\omega\tau_1)^2\right)/\omega\tau_1-b_2(\tilde{C}_1/C)\big((1-(\omega/\omega_i)^2)/\omega\tau_i+(1-(\omega/\omega_k)^2)/\omega\tau_k\big)_i=q_0, \frac{\tilde{C}_i\tilde{C}_2}{C^2}=C_{i2}$ (0,2 p.),

Analogic

$(1-(\omega/\omega_2)^2)\big(b_2(1-(\omega/\omega_2)^2)-b_1\tilde{C}_2/C\big)/\omega\tau_2-\tilde{C}_2/C\big(b_1(1-(\omega/\omega_1)^2)-b_2\tilde{C}_1/C\big)/\omega\tau_1+\omega\tau_2 b_2=0$ (0,3 p.)

$b_2\left((1-(\omega/\omega_2)^2)^2+\frac{\tilde{C}_i\tilde{C}_2}{C^2}+(\omega\tau_2)^2\right)/\omega\tau_2=b_1(\tilde{C}_2/C)\big((1-(\omega/\omega_1)^2)/\omega\tau_1+(1-(\omega/\omega_2)^2)/\omega\tau_2\big)$

(0,3 p.) , apoi găsim

$b_i\big((1-(\omega/\omega_i)^2)^2+\tilde{C}_i\tilde{C}_k/C^2+(\omega\tau_i)^2\big)/\omega\tau_i-b_k\frac{\tilde{C}_i}{C}\big((1-(\omega/\omega_i)^2)/\omega\tau_i+(1-(\omega/\omega_k)^2)/\omega\tau_k\big)=q_0\delta_{i1}$ (0,4 p.)

Notăm:

$D_i=\big((1-(\omega/\omega_i)^2)^2+\tilde{C}_{12}+(\omega\tau_i)^2\big)/\omega\tau_i, B=(1-(\omega/\omega_1)^2)/\omega\tau_1+(1-(\omega/\omega_2)^2)/\omega\tau_2$ (0,3 p.)

Astfel $b_2=b_1\frac{\tilde{C}_2 B}{CD_2}, b_1=q_0 D_2/(D_{12}-C_{12}B^2), D_{12}=D_2 D_1$ (1) (0,3 p.).

Constantele de integrare

$a_1=\big(b_1(1-(\omega/\omega_1)^2)-b_2\tilde{C}_1/C\big)/\omega\tau_1, a_2=\big(b_2(1-(\omega/\omega_2)^2)-b_1\tilde{C}_2/C\big)/\omega\tau_2$ (2) determină semnalul, care poate fi măsurat pe rezistențele R_2, R_1 sau pe C_2, C_1. $q_i(t)=\sqrt{a_i^2+b_i^2}\,cos(\omega t-\phi_i), tg\phi_i=b_i/a_i$ (0,4 p.).

Notând $\omega/\omega_1=x, \omega_1\tau_i=t_i$, ecuațiile (1, 2) iau forma:

$b_2 = b_1 \frac{\tilde{C}_2 B}{C D_2}, b_1 = q_0 D_2/(D_{12} - C_{12}B^2)$ (0,3 p.),

$a_1 = \big(b_1(1-x^2) - b_2\tilde{C}_1/C\big)/xt_1,\ a_2 = \big(b_2(1-(tx)^2) - b_1\tilde{C}_2/C\big)/xt_2, t = \omega_1/\omega_2$ (3) (0,2 p.)

$$D_1 = \frac{\big((1-x^2)^2 + \tilde{C}_{12} + (xt_1)^2\big)}{xt_1},\quad (0{,}2\ \text{p.})\quad D_2 = \frac{\big((1-(tx)^2)^2 + \tilde{C}_{12} + (xt_2)^2\big)}{xt_2}, (0{,}2\ \text{p.})$$

$$B = \frac{(1-x^2)}{xt_1} + \frac{(1-(tx)^2)}{xt_2} \quad (0{,}1\ \text{p.})$$

3B. (4,0 p.)

Folosind graficile determinăm parametrii $t = \sqrt{L_2C_2(C_1+C)/L_1C_1(C_2+C)}$ и $C_2/(C+C_2)$.

Conform graficului, funcția $a_2(x)$ devine egală cu zero în două puncte

$x_1 = 0{,}605 \pm 0{,}001$ (0,3 p.) și în punctul

$x_2 = 1{,}055 \pm 0{,}001$ (0,2 p.).

Funcția $a_2(x)$ este egală cu zero în condiția $b_2(x)(1-(tx)^2) = b_1(x)\tilde{C}_2/C$ (0,5 p.).

Folosind graficile, găsim $b_1(0{,}605) = 1{,}92, b_1(1{,}05) = 2{,}92$ (0,5 p.)

și $b_2(0{,}605) = 10{,}98, b_2(1{,}05) = -1{,}96$ (0,5 p.).

În corespundere cu aceste date, obținem două ecuații pentru parametrii $t = \omega_1/\omega_2$ и $c = \tilde{C}_2/C$

$c = (1 - t^2 0{,}605^2)10{,}98/1{,}92$ (0,5 p.).

și $c = -(1 - t^2 1{,}05^2)1{,}96/2{,}92$, $c = (1 - t^2 0{,}366)5{,}72$ и $c = -(1 - t^2 1{,}1)0{,}67$ (0,5 p.).

$$(1 - t^2 0{,}366)5{,}72 + (1 - t^2 1{,}1)0{,}67 = 0{,}639 = t^2(2{,}09 + 0{,}737) = 2{,}827t^2,$$

$$t^2 = 2{,}26, t = 1{,}503 \pm 0{,}002 \quad (0{,}4\ \text{p.}).$$

Folosind valorile parametrului $t = 1{,}5$, găsim

$$c = (1 - 2{,}25 \cdot 0{,}366)5{,}72 = 1{,}009$$

Și din a doua ecuație $c = -(1 - 2{,}25 \cdot 1{,}1)0{,}67 = 0{,}988$ (0,4 p.)..

Astfel cu precizia de până la un procent $t = 1{,}5, \tilde{C}_2/C = 1{,}0$ (0,2 p.).