Ministerul Educației și Cercetării al Republicii Moldova
Agenția Națională pentru Curriculum și Evaluare

OLIMPIADA REPUBLICANĂ LA FIZICĂ, EDIȚIA LVI

CHIȘINĂU, 20 martie 2022

Теоретический тур ORF 2022, 12 класс

Задача 1 (10,0 б.)

Решение

1A. Используя формулу Брэгга-Вульфа $2d\,sin\,\vartheta = k\lambda$, - (0,5 б.),
получим в результате дифференцирования
$2d\,cos\,\vartheta\,d\vartheta/d\lambda = k$ - (1,25 б.),

$d\vartheta/d\lambda = tg\vartheta/\lambda$ - (0,25 б.)

1B. Для ионов гелия He^{+}, $\frac{1}{\lambda} = 4R\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{144}\right) = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{6^2}\right)$=$1{,}097 \cdot 10^5\,\frac{8}{36}\;cm^{-1}$ - (1,5 б.)

$\lambda = 0{,}41\;\mu m$ - (0,5 б.)

Доплеровское смещение позволяет найти скорость ионов гелия и их кинетическую энергию.
$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = -\frac{v}{c}cos\frac{\pi}{6}$ - (0,5 б.)

$v = c\frac{26}{410}\frac{2}{\sqrt{3}} = 2{,}2 \cdot 10^7 m/s$ - (1,0 б.)

$K = 10MeV$ - (0,5 б.)

1C. Магнитный поток через один виток равен $\Phi_0 = \Phi_1/N_1 = \Phi_2/N_2$ (1) - (1,0 б.)

С учетом взаимной индукции $\Phi_1 = L_1J_1 + L_{12}J_2,\ \Phi_2 = L_2J_2 + L_{12}J_1$ уравнение (1) дает
$N_2(L_1J_1 + L_{12}J_2) = N_1(L_2J_2 + L_{12}J_1)$. - (1,0 б.)

Следовательно, $N_2L_1 = N_1L_{12},\ N_1L_2 = N_2L_{12}$ - (1,0 б.)
или $N_2L_1N_1L_2 = N_2L_{12}N_1L_{12}$ - (0,5 б.)

$L_{12} = \sqrt{L_1L_2}$ - (0,5 б.)

Задача 2 (10,0 б.)

Решение

2A. Уравнения Ньютона $m\dot{v} = mg\,sin\,\phi - F_{fr}$ - (0,25 б.)

и вращательного движения шара на горке

$I_C\dot{\omega} = F_{fr}r - Nk, N = mg\left(cos\,\phi + \frac{v^2}{R_c g}\right), v = -R_c\dot{\phi}$ - (0,5 б.)

дают $\dot{v} = \frac{5}{7}g\left(sin\,\phi - \left(cos\,\phi + \frac{v^2}{R_c g}\right)\frac{k}{r}\right)$ - (0,25 б.)

Используя подсказку, данную в условии задачи, введем новую неизвестную $V = \frac{v^2}{R_c g}$ - (0,25 б.)

Вычислим $\frac{dV}{d\phi} = \frac{2v}{R_c g}\frac{dv}{d\phi} = -\frac{2}{R_c g}R_c\frac{dv}{d\phi}\frac{d\phi}{dt} = -\frac{2}{g}\dot{v}$ - (0,75 б.)

Получим уравнение $\frac{dV}{d\phi} = -\frac{10}{7}\left(sin\,\phi - (cos\,\phi + V)\frac{k}{r}\right)$ - (0,25 б.)

a). Известное решение этого уравнения позволяет вычислить параметры a_1, a_2, a.

Действительно,

$\frac{dV}{d\phi} = \frac{10}{7}\left(a_2\,cos\,\phi - a_1\,sin\,\phi + a_3 a e^{a\phi}\right) = \frac{10}{7}\left(\frac{k}{r}\left(\frac{10}{7}\left(a_1\,cos\,\phi + a_2\,sin\,\phi + a_3 e^{a\phi}\right) + cos\,\phi\right) - sin\,\phi\right)$

- (0,25 б.)

Таким образом $a = \frac{10}{7}\frac{k}{r}, a_1 = \frac{1-0{,}7a^2}{1+a^2}, a_2 = \frac{1{,}7a}{1+a^2}$ - (1,0 б.)

Константу a_3 находим из начального условия для скорости шарика

$a_3 = -(a_1\,cos\,\phi_0 + a_2\,sin\,\phi_0)e^{-a\phi_0}$ - (0,5 б.)

b). Скорость шарика при вылете с горки с учетом силы трения равна

$v_x = \sqrt{2gH},\ H = \frac{5}{7}R_c(a_3(\phi_0) + a_1)$ - (0,5 б.)

С учетом деформации горки $a_3(\phi_0) + a_1 = \frac{1-0{,}7a^2}{1+a^2}\left(1 - e^{-a\phi_0} \cos\phi_0\right) - \frac{1{,}7a}{1+a^2} e^{-a\phi_0} \sin\phi_0$.

В пределе $k = a = 0$ находим $H = \frac{5}{7} R_c(1 - \cos\phi_0)$ - (0,25 б.)

Закон сохранения энергии на горке без учета деформации имеет вид

$I_A\omega^2/2 = \frac{7}{10} mr^2\omega^2 = mgR_C(\cos\phi - \cos\phi_0)$ - (0,25 б.)

2B. Первое касание стола будет в точке с координатой $x_1 = v_x\sqrt{\frac{2h}{g}} = 2\sqrt{hH}$. - (0,25 б.)

Здесь координата x отсчитывается от конца горки с трамплином,

$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ - (0,25 б.) время свободного полета шарика до первого касания стола. В большинстве случаев выполняется нервенство $\frac{k}{r} << 1$, рассмотрим предел $a << 1$. $H = \frac{5}{7} R_c\left(1 - \cos\phi_0 - 1{,}7ae^{-a\phi_0} \sin\phi_0\right)$ - (1,0 б.).

Потери энергии шарика на деформацию горки определяются в этом случае уравнением $\frac{\Delta K}{K} = \frac{17a \sin\phi_0}{7(1-\cos\phi_0)} e^{-a\phi_0}$. - (0,5 б.)

2C. После первого касания вертикальная компонента скорости меняет знак. Вертикальная компонента скорости при абсолютно упругом ударе получает, таким образом, приращение $\Delta v_y = 2\sqrt{2gh}$ - (0,25 б.)

$m\Delta v_y = \int_0^{\Delta t} N(t)dt$ - (0,25 б.). Здесь Δt - время удара.

Время полета до второго касания равно $2\sqrt{\frac{2h}{g}} = 2t_1$ - (0,25 б.),

так как после первого касания стола шарик снова поднимается на высоту h. Сила трения, действующая на шарик при ударе на столе $\vec{F}_{fr}$, будет направлена вдоль оси x,

а, следовательно, $m\dot{v}_x = F_{fr}, I_C\dot{\omega} = -F_{fr}r + Nk = -rm\dot{v}_x + Nk$ - (0,75 б.)

За время удара $rm\Delta v_x + I_C\Delta\omega = km\Delta v_y$. - (0,5 б.)

Теоретический тур ORF 2022, 12 класс

Согласно условию задачи, при ударе скорость шарика получает приращение $\Delta v_x = \frac{2}{5} v_x + \frac{k}{r} 2v_y$ - (0,25 б.)

Таким образом расстояние между вторым и первым касанием шарика со столом определяется следующим уравнением $x_2 - x_1 = (v_x + \Delta v_x) 2\sqrt{\frac{2h}{g}} = 2x_1 \left\{1 + \frac{2}{5}\left(1 + 5\frac{k}{r}\sqrt{\frac{h}{H}}\right)\right\}$ - (0,5 б.)

Без учета вращения $x_2 - x_1 = 2x_1$ - (0,25 б.)

Вращение увеличивает Δx. При ударе вращательное движение переходит в поступательное

Теоретический тур ORF 2022, 12 класс

Задача 3 (10,0 б.)

Решение

3A. a) Отношение $V/K = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} / \frac{3}{2}kT$ - (1,0 б.)

оценим, считая, что на каждый электрон в среднем приходится объем $v_0 = \pi d^3/6$.

Находим среднее расстояние между электронами $r = 2 \cdot 10^{-8}\ m$. Таким образом, $V/K \cong 0{,}2$. - (0,5 б.)

b) По аналогии с плоским конденсатором, поле при смещении плазмы равно $E(x) = \sigma_e(x)/\varepsilon\varepsilon_0$. - (0,25 б.)

Здесь плотность заряда электронов $\sigma_e = neSx/S = nex$ - (0,25 б.)

Уравнение Ньютона колебаний плазмы $m\ddot{x} = -ne^2x/\varepsilon\varepsilon_0$ - (0,5 б.)

определяет плазменную частоту $\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\varepsilon\varepsilon_0}}$ - (0,5 б.)

c) Энергия плазмона равна $\hbar\omega_p$. В металлах $n \approx 10^{22}\ cm^{-3},\ \varepsilon = 1,\ m = 0{,}91 \cdot 10^{-30} kg$. Следовательно, $\hbar\omega_p \approx 10\ eV$ - (0,75 б.)

В полупроводниках концентрация электронов проводимости на шесть порядков меньше, следовательно, $\hbar\omega_p \approx 10 meV$ - (0,25 б.)

3B. a). Работа по смещению электронов плазмы как целого равна энергии плоского конденсатора $A_{tot} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{(neSx)^2}{2\varepsilon\varepsilon_0 S}d$, а в расчете на один электрон $\frac{A_{tot}}{nSd} = A_e = \frac{ne^2x^2}{2\varepsilon\varepsilon_0}$ - (1,0 б.)

b). Тепловые флуктуации электрона

$\sqrt{\langle (E)^2\rangle - \langle E\rangle^2} = \sqrt{\langle (mv^2/2)^2\rangle - \langle mv^2/2\rangle^2}$ - (0,5 б.)

с учетом среднего

$\langle mv^2/2\rangle = \frac{3kT}{2}, \sqrt{\langle(\Delta E)^2\rangle} = kT\sqrt{\frac{15-9}{4}} = kT\sqrt{\frac{3}{2}}$ - (0,5 б.)

определяют среднее смещение электрона $A_e = \frac{ne^2x^2}{2\varepsilon\varepsilon_0} = kT\sqrt{\frac{3}{2}},\ x = \left(\sqrt{6}\frac{kT\varepsilon\varepsilon_0}{ne^2}\right)^{1/2}$ - (1,0 б.)

3C. В соответствии с условием задачи $E(x) - \frac{\sigma_{ind}(x)}{2\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}$ - (0,25 б.).

Здесь σ -внешний заряд.

Индуцированный заряд

$\sigma_{ind}(x) = \int_{-x}^{x}\left(\rho_{ion} - e\left(1 - \frac{U(x)}{kT}\right)n\right)dx = -\frac{e^2n}{kT}2\int_0^x \phi(x)dx$ - (0,25 б.).

приводит к экранировке $E(x) + \frac{e^2n}{kT\varepsilon\varepsilon_0}\int_0^x \phi(x)dx = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{1}{\lambda_D}\phi_0 e^{-x/\lambda_D} - \frac{e^2n}{kT\varepsilon\varepsilon_0}\lambda_D\phi_0\left(e^{-x/\lambda_D} - 1\right)$ - (1,0 б.)

с параметрами $\lambda_D = \sqrt{\frac{kT\varepsilon\varepsilon_0}{e^2n}}, \phi_0 = \lambda_D\frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}$, - (0,5 б.)

Без учета экранировки $\phi(x) = \phi_0 - \frac{\sigma x}{2\varepsilon\varepsilon_0}$ - (0,5 б.),

что соответствует пределу бесконечной длины экранировки λ_D. Потенциал Юкавы имеет вид

$\phi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}e^{-r/\lambda_D}$ - (0,5 б.)