

**Республиканская Олимпиада по Математике**  
**Второй день, 1 марта 2020 года, IX-й класс**

9.5. Показать, что для каждого натурального ненулевого числа  $n$  существует последовательность из  $2n + 1$  натуральных последовательных чисел так, чтобы сумма квадратов первых  $n + 1$  из них равнялась бы сумме квадратов следующих  $n$  чисел. Проверить, если существует такая последовательность с числом 2020 в середине.

9.6. Найти все пары натуральных простых чисел  $p, q$ , удовлетворяющих уравнению

$$3p^4 + 5q^4 + 15 = 13p^2q^2.$$

9.7. Дан остроугольный треугольник  $ABC$  с  $AB > AC$ . Точка  $F$ , расположенная на стороне  $BC$ , является основанием высоты, опущенной из точки  $A$ , а точка  $H$  является ортоцентром треугольника  $ABC$ . На полупрямой ( $BC$  берется точка  $D$  так, что  $C \in (BD)$ ). Окружность, описанная около треугольника  $DFH$ , пересекает отрезок  $(AD)$  в точке  $N$  так, что точка  $N$  принадлежит и окружности, описанной около треугольника  $ABC$ . Доказать, что прямая  $NH$  проходит через середину стороны  $BC$ .

9.8. Натуральные числа  $a, b, c, d$  и  $n$  удовлетворяют соотношениям  $a^2 - b^2 = c^2 - d^2 = n$ . Показать, что число  $2(a + b)(c + d)(ac + bd - n)$  является квадратом некоторого натурального числа.

**Время работы: 240 минут.**

**Правильное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов. ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!**

**Республиканская Олимпиада по Математике**  
**Второй день, 1 марта 2020 года, IX-й класс**

9.5. Показать, что для каждого натурального ненулевого числа  $n$  существует последовательность из  $2n + 1$  натуральных последовательных чисел так, чтобы сумма квадратов первых  $n + 1$  из них равнялась бы сумме квадратов следующих  $n$  чисел. Проверить, если существует такая последовательность с числом 2020 в середине.

9.6. Найти все пары натуральных простых чисел  $p, q$ , удовлетворяющих уравнению

$$3p^4 + 5q^4 + 15 = 13p^2q^2.$$

9.7. Дан остроугольный треугольник  $ABC$  с  $AB > AC$ . Точка  $F$ , расположенная на стороне  $BC$ , является основанием высоты, опущенной из точки  $A$ , а точка  $H$  является ортоцентром треугольника  $ABC$ . На полупрямой ( $BC$  берется точка  $D$  так, что  $C \in (BD)$ ). Окружность, описанная около треугольника  $DFH$ , пересекает отрезок  $(AD)$  в точке  $N$  так, что точка  $N$  принадлежит и окружности, описанной около треугольника  $ABC$ . Доказать, что прямая  $NH$  проходит через середину стороны  $BC$ .

9.8. Натуральные числа  $a, b, c, d$  и  $n$  удовлетворяют соотношениям  $a^2 - b^2 = c^2 - d^2 = n$ . Показать, что число  $2(a + b)(c + d)(ac + bd - n)$  является квадратом некоторого натурального числа.

**Время работы: 240 минут.**

**Правильное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов. ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!**