

Olimpiada Republicană la Matematică
Ziua a doua, 1 martie 2020, Clasa a IX-a

9.5. Să se arate, că pentru oricare număr natural nenul n există un șir de $2n+1$ numere naturale consecutive astfel, încât suma pătratelor primelor $n+1$ dintre ele să fie egală cu suma pătratelor următoarelor n numere. Să se verifice, dacă există un asemenea șir cu numărul din mijloc egal cu 2020.

9.6. Să se afle toate perechile de numere naturale prime p, q , care satisfac ecuația

$$3p^4 + 5q^4 + 15 = 13p^2q^2.$$

9.7. Fie triunghiul ascuțitunghic ABC cu $AB > AC$. Punctul F , situat pe latura BC , este piciorul înălțimii duse din vârful A , iar H este ortocentrul triunghiului ABC . Pe semidreapta $(BC$ se ia un punct D astfel, încât $C \in (BD)$. Cercul circumscris triunghiului DFH intersectează segmentul (AD) în punctul N astfel, încât punctul N aparține și cercului circumscris triunghiului ABC . Demonstrați, că dreapta NH trece prin mijlocul laturii BC .

9.8. Numerele naturale a, b, c, d și n verifică relațiile $a^2 - b^2 = c^2 - d^2 = n$. Să se arate, că numărul $2(a+b)(c+d)(ac+bd-n)$ este un pătrat perfect.

Timp de lucru: 240 minute

Rezolvarea corectă a fiecărei probleme se apreciază cu 7 puncte. MULT SUCCES !

Olimpiada Republicană la Matematică
Ziua a doua, 1 martie 2020, Clasa a IX-a

9.5. Să se arate, că pentru oricare număr natural nenul n există un șir de $2n+1$ numere naturale consecutive astfel, încât suma pătratelor primelor $n+1$ dintre ele să fie egală cu suma pătratelor următoarelor n numere. Să se verifice, dacă există un asemenea șir cu numărul din mijloc egal cu 2020.

9.6. Să se afle toate perechile de numere naturale prime p, q , care satisfac ecuația

$$3p^4 + 5q^4 + 15 = 13p^2q^2.$$

9.7. Fie triunghiul ascuțitunghic ABC cu $AB > AC$. Punctul F , situat pe latura BC , este piciorul înălțimii duse din vârful A , iar H este ortocentrul triunghiului ABC . Pe semidreapta $(BC$ se ia un punct D astfel, încât $C \in (BD)$. Cercul circumscris triunghiului DFH intersectează segmentul (AD) în punctul N astfel, încât punctul N aparține și cercului circumscris triunghiului ABC . Demonstrați, că dreapta NH trece prin mijlocul laturii BC .

9.8. Numerele naturale a, b, c, d și n verifică relațiile $a^2 - b^2 = c^2 - d^2 = n$. Să se arate, că numărul $2(a+b)(c+d)(ac+bd-n)$ este un pătrat perfect.

Timp de lucru: 240 minute

Rezolvarea corectă a fiecărei probleme se apreciază cu 7 puncte. MULT SUCCES !