Olimpiada Republicană la Matematică
Ziua a doua, 1 martie 2020, Clasa a IX–a
Soluţii

Problema 9.5. *Să se arate, că pentru oricare număr natural nenul n există un şir de $2n+1$ numere naturale consecutive astfel, încât suma pătratelor primelor $n+1$ dintre ele să fie egală cu suma pătratelor următoarelor n dintre ele. Să se verifice, dacă există un asemenea şir cu numărul din mijloc egal cu 2020.*

Rezolvare. Fie k numărul din mijlocul acestui şir, $0<k<n$. Şirul are forma

$$k-n,\ k-(n-1),\ k-(n-2),\ \ldots,\ k-1,\ k,\ k+1,\ \ldots,\ k+(n-2),\ k+(n-1),\ k+n.$$

Conform condiţiei,

$$(k-n)^2+[k-(n-1)]^2+[k-(n-2)]^2+\ldots+(k-1)^2+k^2=(k+1)^2+[k+(n-1)]^2+(k+n)^2.$$

După ridicarea la pătrat şi reducerea termenilor asemenea, se obţine

$$-2kn-2k(n-1)-2k(n-2)-\ldots-2k+k^2=2k+\ldots+2k(n-2)+2k(n-1)+2kn,$$

adică $k^2=4k(1+2+3+\ldots+n)$, sau $k^2=2kn(n+1)$. Cum $k\neq 0$, rezultă $k=2n(n+1)$. Evident, $0<n<k$.

Astfel, pentru fiecare n se află termenul din mijloc al şirului, deci şi şirul în întregime.

Pentru $k=2020$ se obţine $n(n+1)=1010$. Dar $1010=2\cdot 5\cdot 101$, prin urmare, numărul 1010 nu poate fi produsul a două numere naturale consecutive. Numărul 2020 nu poate fi termenul din mijloc al unui şir cu proprietate din enunţ.

Problema 9.6. *Să se afle toate perechile de numere naturale prime p, q, care satisfac ecuaţia*

$$3p^4+5q^4+15=13p^2q^2.$$

Rezolvare. Numerele p şi q nu pot fi concomitent impare. Pentru verificare, se foloseşte congruenţa modulo 4. Partea stângă, $3p^4+5q^4+15\equiv 3 \pmod 4$, iar partea dreaptă, $13p^2q^2\equiv 1 \pmod 4$.

Numerele p şi q nu pot fi concomitent pare, adică nu pot fi egale fiecare cu 2. Într-adevăr, în acest caz partea stângă este un număr impar, iar cea dreaptă este un număr par. Rămâne de examinat cazurile, în care unul din numerele p, q este par, adică egal cu 2.

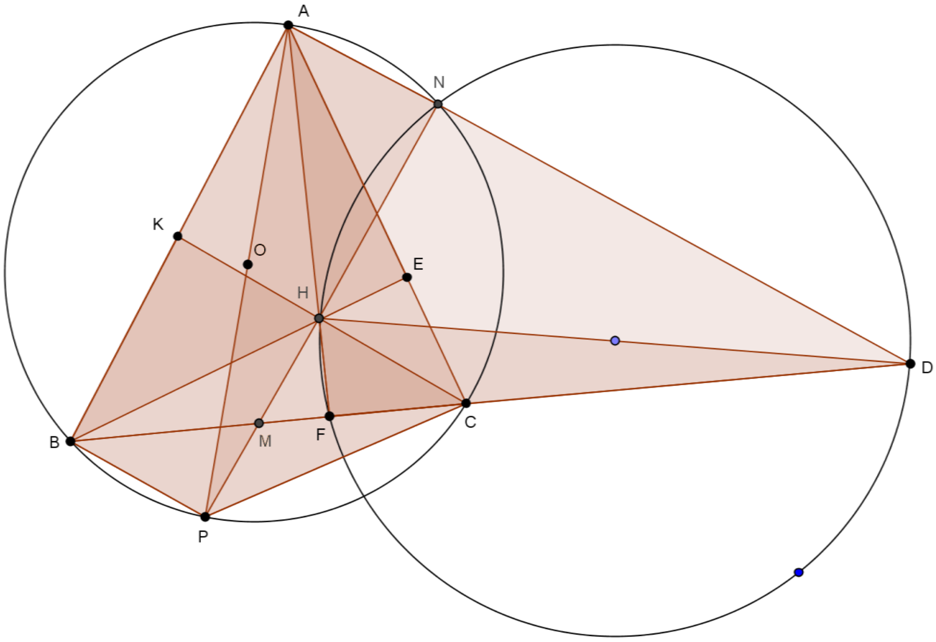
Fie $p=2$. Ecuaţia capătă forma $48+5q^4+15=52q^2$ adică $5q^4-52q^2+63=0$. Din ecuaţia bi-pătrată obţinută se află $q^2=\frac{7}{5}$ şi $q^2=9$. Doar valoarea $q=3$ este număr prim. Astfel, o soluţie a ecuaţiei date este $(p,\ q)=(2,\ 3)$.

Fie acum $q=2$. Ecuaţia capătă forma $3p^4+80+15=52p^2$, adică $3p^4-52p^2+105=0$. Din ecuaţia bipătrată obţinută se află $p^2=\frac{7}{3}$ şi $p^2=15$. Ecuaţia nu are soluţii nici măcar în numere intregi.

Astfel, ecuaţia dată are o singură soluţie: $(p,\ q)=(2,\ 3)$.

Problema 9.7. *Fie triunghiul ascuţitunghic ABC cu $AB>AC$. Punctul F, situat pe latura (BC), este piciorul înalţimii duse din vârful A, iar H este ortocentrul triunghiului ABC. Pe semidreapta $(BC$ se ia un punct D astfel, încât $C\in(BD)$. Cercul circumscris triunghiului DFH intersectează segmentul (AD) în punctual N astfel, încât punctul N aparţine şi cercului circumscris triunghiului ABC. Demonstraţi, că dreapta NH trece prin mijlocul laturii (BC).*

Rezolvare. Deoarece $m(\angle DFH)=90^0 \Rightarrow DH-$ diametrul cercului circumscris triunghiului DFH. Cercul circumscris triunghiului DFH intersectează segmentul (AD) în punctul N, prin urmare, $m(\angle DNH)=90^0=m(\angle ANH)$. De aici obţinem că dreapta NH este perpendiculară pe dreapta AD. Fie K piciorul înalţimii duse din vârful C, iar E piciorul înalţimii duse din vârful B. Rezultă că patrulaterul $AEHK$ este inscriptibil în cercul cu diametrul AH. De aici obţinem că $m(\angle EHK)=180^0-m(\angle A)=m(\angle BHC)$. Cum $m(\angle ANH)=90^0$ şi $AB>AC$, rezultă că punctul N este punctul, în care cercul circumscris triunghiului ABC intersectează cercul circumscris patrulaterului



$AEHK$. Fie P punctul, în care dreapta NH intersectează cercul circumscris triunghiului ABC. Atunci obţinem, că $m(\angle BPC) = 180^0 - m(\angle A) = m(\angle BHC)$. Cum $m(\angle ANP) = 90^0$, rezultă că segmentul AP este diametrul cercului circumscris triunghiului ABC. De aici obţinem că $m(\angle ABP) = 90^0$, de unde $BP \parallel CH$. Prin urmare, patrulaterul $BPCH$ este paralelogram, în care segmentul PH este diagonală. Astfel, dreapta NH trece prin mijlocul laturii (BC), c.t.d.

Problema 9.8. Numerele naturale a, b, c, d şi n verifică relaţiile $a^2 - b^2 = c^2 - d^2 = n$. Să se arate, că numărul $2(a+b)(c+d)(ac+bd-n)$ este un pătrat perfect.

Rezolvare. Folosind relaţiile, $a^2 - b^2 = c^2 - d^2 = n$, se obţine consecutiv:

$$E = 2(a+b)(c+d)(ac+bd-n) = (a+b)(c+d)(2ac+2bd-2n) = (a+b)(c+d)[(b+d)^2-(a-c)^2] =$$
$$= (a+b)(c+d)(b+d-a+c)(b+d+a-c) = (a+b)(c+d+b-a)\cdot(c+d)(a+b+d-c) =$$
$$= [(a+b)(c+d)+(a+b)(b-a)]\cdot[(c+d)(a+b)+(c+d)(d-c)] =$$
$$\left[(a+b)(c+d)-(a^2-b^2)\right]\cdot\left[(a+b)(c+d)-(c^2-d^2)\right] = \left[(a+b)(c+d)-n\right]\cdot\left[(a+b)(c+d)-n\right] =$$
$$= [(a+b)(c+d)-n]^2.$$

Afirmaţia este demonstrată.