Olimpiada Republicană la Matematică
Ziua a doua, 1 martie 2020, Clasa a IX–a
Barem de evaluare

Problema 9.5. Să se arate, că pentru oricare număr natural nenul n există un şir de $2n+1$ numere naturale consecutive astfel, încât suma pătratelor primelor $n+1$ dintre ele să fie egală cu suma pătratelor următoarelor n numere. Să se verifice, dacă există un asemenea şir cu numărul din mijloc egal cu 2020.

Etape ale rezolvării cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Notează numărul din mijlocul şirului, de exemplu, k şi scrie şirul	1 punct
2.	Egalează suma pătratelor primelor $n+1$ numere cu suma pătratelor celorlalte n numere	1 pucnt
3.	Reduce termenii asemenea şi obţine $k^2 = 2kn(n+1)$.	2 puncte
4.	Cum $k \neq 0$, obţine $k = 2n(n+1)$, c.t.d.	1 punct
5.	Pentru $k = 2020$ obţine $n(n+1) = 1010$ şi	1 punct
6.	arată această ecuaţie nu are soluţii în N^*.	1 punct
	Punctaj total:	**7 puncte**

Remarcă: *Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.*

Problema 9.6. Să se afle toate perechile de numere naturale prime *p, q,* care satisfac ecuaţia

$$3p^4 + 5q^4 + 15 = 13p^2q^2 .$$

Etape ale rezolvării cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctej acordat
1.	Arată, că numerele p , q nu pot fi ambele impare	2 puncte
2.	Arată, că numerele *p, q* nu pot fi ambele pare (adică egale ambele cu 2)	1 punct
3.	Arată, că pentru $q = 2$ ecuaţia nu are soluţii	2 puncte
4.	Pentru $p = 2$ află unica soluţie $(p, q) = (2, 3)$.	2puncte
	Punctaj total	**7 puncte**

Remarcă. *Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte*

Problema 9.7. Fie triunghiul ascuţitunghic ABC cu $AB > AC$. Punctul F, situat pe latura BC, este piciorul înalţimii duse din vârful A, iar H este ortocentrul triunghiului ABC. Pe semidreapta $(BC$ se ia un punct D astfel încât $C \in (BD)$. Cercul circumscris triunghiului DFH intersectează segmentul (AD) în punctul N astfel, încât punctul N aparţine şi cercului circumscris triunghiului ABC. Demonstraţi că dreapta NH trece prin mijlocul laturii BC.		
Etape ale rezolvării cu barem de evaluare		
Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	A demonstrat că dreapta NH este perpendiculară pe dreapta AD.	1p
2	A demonstrat că $m(\angle EHK) = 180^0 - m(\angle A) = m(\angle BHC)$.	1p
3	A demonstrat că punctul N este punctul în care cercul circumscris triunghiului ABC intersectează cercul circumscris patrulaterului $AEHK$.	1p
4	A demonstrat că $m(\angle BPC) = 180^0 - m(\angle A) = m(\angle BHC)$.	1p
5	Arată că segmentul AP este diametrul cercului circumscris triunghiului ABC.	1p
6	A demonstrat că $m(\angle ABP) = 90^0 \Rightarrow BP \parallel CH$ şi deduce că patrulaterul $BPCH$ este paralelogram, în care segmentul PH este o diagonală.	1p
7	Deduce că dreapta NH trece prin mijlocul laturii (BC), c.t.d.	1p
	Punctaj total:	**7 puncte**

Remarcă: *Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.*

Problema 9.8. Numerele naturale a, b, c, d şi n verifică relaţiile $a^2 - b^2 = c^2 - d^2 = n$. Să se arate, că numărul $2(a+b)(c+d)(ac+bd-n)$ este un pătrat perfect.		
Etape ale rezolvării		
Pasul		
1.	Obţine $E = 2(a+b)(c+d)(ac+bd-n) = (a+b)(c+d)(2ac+2bd-2n)$.	1 punct
2.	Foloseşte egalitatea $2ac+2bd-2n = (b+d)^2 - (a-c)^2$.	2 puncte
3.	Obţine $(b+d)^2 - (a-c)^2 = (b+d-a+c)(b+d+a-c)$.	1 punct
4.	Din $E = (a+b)(c+d+b-a)\cdot(c+d)(a+b+d-c)$ obţine $E = [(a+b)(c+d)+(a+b)(b-a)]\cdot[(c+d)(a+b)+(c+d)(d-c)]$.	2 puncte
5.	Stabileşte că $(a+b)(b-a) = (c+d)(d-c) = -n$.	1 punct
6.	Obţine $E = \left[(a+b)(c+d)-n\right]\cdot\left[(a+b)(c+d)-n\right] = [(a+b)(c+d)-n]^2$, c.t.d.	1 punct
	Punctaj total:	**7 puncte**

Remarcă: *Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.*