Olimpiada Republicană la Matematică
Prima zi, 29 februarie 2020, Clasa a IX–a
Soluţii

Problema 9.1. *Să se afle toate numerele naturale* n $(n>1)$*, care satisfac următoarea condiţie: din mulţimea de numere* $\{1,2,3,\dots,n\}$ *poate fi eliminat un număr astfel, încât media aritmetică a numerelor din mulţime să se schimbe cu* $\frac{1}{2020}$*. Pentru fiecare astfel de număr n să se arate şi numărul eliminat.*

Rezolvare. Fie n un asemenea număr şi $A=\{1,2,3,\dots,n\}$. Suma numerelor mulţimii A, $S=\frac{n(n+1)}{2}$, iar media lor, $M=\frac{n+1}{2}$. Fie m numărul, eliminat din mulţimea A, $1\le m\le n$. Fie A' mulţimea elementelor rămase, $A'=A\setminus\{m\}=\{1,2,...,m-1,m+1,...,n\}$. Suma numerelor mulţimii A', $S'=S-m=\frac{n(n+1)-2m}{2}$, iar media lor, $M'=\frac{n(n+1)-2m}{2(n-1)}$. În rezultatul eliminării numărului m media numerelor poate să se mărească sau să se micşoreze cu $\frac{1}{2020}$, Conform condiţiei,

$M-M'=\frac{1}{2020}$ sau $M'-M=\frac{1}{2020}$. Se examinază ambele cazuri.

Caz.1. Fie $M-M'=\frac{1}{2020}$. Se obţine $\frac{n+1}{2}-\frac{n(n+1)-2m}{2(n-1)}=\frac{2m-n-1}{2(n-1)}=\frac{1}{2020}$, de unde $n=\frac{2020m-1009}{1011}=\frac{(2022m-1011)-2(m-1)}{1011}=2m-1-2\cdot\frac{m-1}{1011}$. Cum n este număr natural, iar $(2,\,1011)=1$, rezultă că $\frac{m-1}{1011}$ trebuie să fie un număr natural. Fie $\frac{m-1}{1011}=k$, unde $k\in\mathrm{N}$. Astfel, $m=1011k+1$. Dar atunci $n=2(1011k+1)-1-2\cdot k$, adică $n=2020k+1$. Cum $m\le n$, rezultă $k>0$, adică $k\in\mathrm{N}^*$.

Astfel, în cazul 1 numerele n sunt toate numerele de forma $n=2020k+1$; numărul respectiv, care se elimină din mulţimea A, este $m=1011k+1$.

Caz 2. Fie $M'-M=\frac{1}{2020}$. Ca şi în cazul 1, se obţine că numerele n sunt toate numerele de forma $n=2020k+1$; numărul respectiv, care se elimină din mulţimea A este $m=1009k+1$.

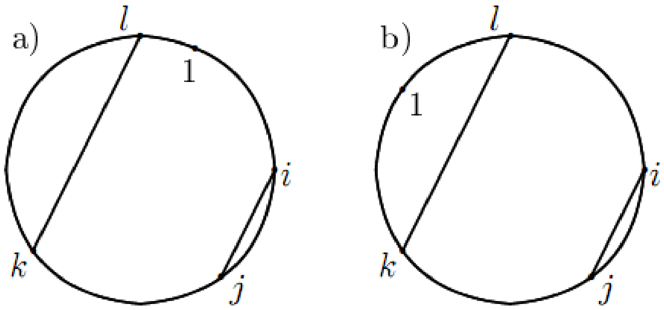
Definitiv, condiţia din enunţ o satisfac toate numerele naturale de forma $n=2020k+1$, unde $k=1,2,3,\dots$. Numerele respective, eliminate din A, sunt numerele de forma $m=1011k+1$ şi $m=1009k+1$.

Problema 9.2. *Cercul este divizat de 2020 de puncte în 2020 de arce egale. Păcală susţine, că poate construi o linie frântă închisă cu vârfurile în aceste puncte astfel, încât oricare două segmente ale ei să nu fie paralele. Are dreptate Păcală?*

Rezolvare. Punctele de pe cerc se notează cu numerele 1,2,3,...,2020 în mod consecutiv şi într-o anumită direcţie, de exemplu, în sens orar. Pentru simplitate, lungimea fiecăruia din cele 2020 de arce se va considera egală cu 1. Fiecare segment al liniei frânte se notează cu perechea de numere din extremităţile lui.

Fie că segmentele *ij* şi *kl* sunt paralele, ca în figurile de mai jos. Arcele, cuprinse între coardele paralele *ij* şi *kj* sunt congruente. Punctul 1 poate fi situat pe unul dintre aceste arce sau în afara lor. Dacă punctul 1 e situat pe unul dintre aceste arce, ca în fig. a), atunci $2020-(l-1)+i-1=k-j$, de unde rezultă

$$(k+l)-(i+j)=2020. \qquad \text{(a)}$$



Dacă punctul 1 e situat în afara arcelor egale, ca în fig. b), atunci $i-l=k-j$, de unde rezultă

$$i+j=k+l. \qquad \text{(b)}$$

Dacă punctul 1 coincide cu unul din extremităţile segmentelor, deasemenea se obţine una din relaţiile (a) sau (b). Egalităţile (a) şi (b) pot fi unificate:

$$i+j\equiv k+l\,(\mathrm{mod}\ 2020). \qquad (*)$$

Relaţia obţinută reprezintă condiţia de paralelism a segmentelor *ij* şi *kl*. Fie că linia frântă începe în punctul n_1 şi trece prin toate punctele:

$$n_1\to n_2\to n_3\to\ldots\to n_{2020}\to n_1.$$

Presupunem, că Păcală are dreptate: printre segmentele n_1n_2, n_2n_3, …, $n_{2020}n_1$ nu există două paralele. Conform $(*)$, aceasta înseamnă, că printre numerele n_1+n_2, n_2+n_3, … , $n_{2020}+n_1$ nu există două, care ar fi congruente modulo 2020. Prin împărţirea acestor numere la 2020 se obţin 2020 de resturi diferite: $0,1,2,\ldots,2019$. Atunci

$$(n_1+n_2)+(n_2+n_3)+\ldots+(n_{2020}+n_1)\equiv 0+1+2+3+\ldots+2019\,(\mathrm{mod}\ 2020).$$

Partea stângă a acestei congruenţe,

$$(n_1+n_2)+(n_2+n_3)+\ldots+(n_{2020}+n_1)=2(n_1+n_2+\ldots+n_{2020})=2021\cdot 2020,$$

este congruentă cu 0 modulo 2020. În acelaşi timp, partea dreaptă,

$$0+1+2+\ldots+2019=\frac{2020}{2}\cdot 2019=1010\cdot 2019,$$

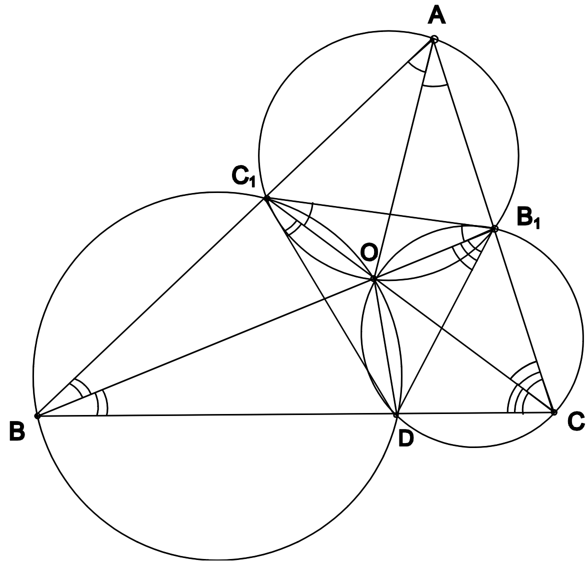
care nu este congruentă cu 0 modulo 2020.

Contradicţia arată, că Păcală nu va putea realiza construcţia, prin urmare, nu poate fi crezut.

Problema 9.3. *Bisectoarele* BB_1 *şi* CC_1 *ale triunghiului ABC se intersectează în punctul O. Măsura unghiului* $\angle BOC$ *este egală cu* 120^0*. Cercul, circumscris triunghiului* BC_1O*, intersectează latura BC în punctul D. Să se demonstreze, că* $AD\perp B_1C_1$*.*

Rezolvare.

$$\angle BOC=120^o\Rightarrow\angle OBC+\angle OCB=(\angle ABC+\angle ACB)/2=60^o\Rightarrow\angle BAC=\angle B_1AC_1=60^o;$$



$\angle B_1OC_1 = \angle BOC = 120^o$. Astfel, patrulaterul AB_1OC_1 este inscriptibil. Dar $\angle ODC = 180^o - \angle BDO = \angle BC_1O = 180^o - \angle AC_1O = \angle AB_1O = 180^o - \angle OB_1C$. Prin urmare, patrulaterul OB_1CD de asemenea este inscriptibil. De aici, $\angle OAC_1 = \angle OAB_1 = \angle OB_1C_1 = \angle OC_1B_1 = \frac{1}{2}\angle A$,

$\angle OC_1D = \angle OBD = \angle OBC_1 = \frac{1}{2}\angle B$,

$\angle DB_1O = \angle OCD = \angle OCB_1 = \frac{1}{2}\angle C \Rightarrow \angle B_1C_1D = \angle OC_1B_1 + \angle OC_1D = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$,

$\angle DB_1C_1 = \angle DB_1O + \angle OB_1C_1 = \frac{1}{2}(\angle A + \angle C)$. Cum $\angle AOC_1$ este unghi exterior al tri-unghiului ACO, rezultă $\angle AOC_1 = (\angle A + \angle C)/2$. De aici,

$$\angle AC_1B_1 = \angle AOB_1 = (\angle A + \angle B)/2 = \angle B_1C_1D, \ \angle AB_1C_1 = \angle AOC_1 = (\angle A + \angle C)/2 = \angle DB_1C_1.$$

În rezultat se obţine $\Delta AB_1C_1 \equiv \Delta DB_1C_1$ (după latura B_1C_1 şi unghiurile alăturate ei). Prin urmare, punctul D este simetric punctului A în raport cu B_1C_1. De aici se obţine $AD \perp B_1C_1$, c.t.d.

Problema 9.4. *Să se demonstreze, că pentru oricare numere pozitive a, b, c este adevărată inegalitatea*

$$\frac{a+b-2c}{b+c} + \frac{b+c-2a}{c+a} + \frac{c+a-2b}{a+b} \geq 0.$$

Când are loc egalitatea?

Rezolvare. După înmulţirea cu $(a+b)(b+c)(c+a)$ se obţine inegalitatea

$$(a+b)(c+a)(a+b-2c) + (a+b)(b+c)(b+c-2a) + (b+c)(c+a)(c+a-2b) \geq 0, \qquad (*)$$

echivalentă celei din enunţ. Pentru fiecare din cei trei termini se deshid parantezele:

$(a+b)(c+a)(a+b-2c) = a^3 + 2a^2b - 2ac^2 - 2bc^2 - a^2c + ab^2 + b^2c$;

$(a+b)(b+c)(b+c-2a) = b^3 + 2b^2c - 2a^2b - 2a^2c - ab^2 + ac^2 + bc^2$;

$(b+c)(c+a)(c+a-2b) = c^3 + 2ac^2 - 2b^2c - 2ab^2 - bc^2 + a^2b + a^2c.$

Acum inegalitatea $(*)$ capătă forma $a^3 + b^3 + c^3 - 2ab^2 - 2bc^2 - 2ca^2 + a^2b + b^2c + c^2a \geq 0$. Urmeză, în mod echivalent,

$(a^3 - 2a^2c + c^2a) + (b^3 - 2ab^2 + a^2b) + (c^3 - 2bc^2 + b^2c) \geq 0$;

$a(a^2 - 2ac + c^2) + b(b^2 - 2ab + a^2) + c(c^2 - 2bc + b^2) \geq 0$; $\quad a(a-c)^2 + b(b-a)^2 + c(c-b)^2 \geq 0$.

Toate transformările au fost echivalente, iar ultima inegalitate este adevărată pentru oricare numere pozitive a, b, c. Afirmaţia este demonstrată.

Din ultima inegalitate este clar, că egalitatea se realizează doar pentru $a = b = c$.