Olimpiada Republicană la Matematică
Prima zi, 29 februarie 2020, Clasa a IX–a
Barem de evaluare

Problema 9.1. Să se afle toate numerele naturale n $(n>1)$, care satisfac următoarea condiţie: din mulţimea de numere $\{1,2,3,\dots,n\}$ poate fi eliminat un număr astfel, încât media aritmetică a numerelor din mulţime să se schimbe cu $\frac{1}{2020}$. Pentru fiecare astfel de număr n să se arate şi numărul eliminat.

Rezolvare cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Află media aritmetică M a numerelor mulţimii *{1,2,3,...,n}*.	1 punct
2.	Notează numărul eliminat, de exemplu, cu *m* şi află media M' a numerelor rămase.	1 punct
3.	*Pentru* $M-M'>0$: Află $\frac{2m-n-1}{2(n-1)}=\frac{1}{2020}$.	1 punct
4.	Obţine $n=2020k+1,\ k\in N^*$.	1 punct
5.	Află numărul eliminat $m=1011k+1,\ k\in N^*$.	1 punct
6.	*Pentru* $M'-M>0$: Află $n=2020k+1,\ k\in N^*$.	1 punct
7.	Obţine $m=1009k+1,\ k\in N^*$ şi scrie răspunsul corect.	1 punct
	Punctaj total:	**7 puncte**

Remarcă: *Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.*

Problema 9.2. Cercul este divizat de 2020 de puncte în 2020 de arce egale. Păcală susţine, că poate construi o linie frântă închisă cu vârfurile în toate aceste puncte astfel, încât oricare două segmente ale ei să nu fie paralele. Are dreptate Păcală?

Rezolvare cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat

1.	Notează punctele cu 1,2,3,…,2020, iar segmentul cu extremităţile *i, j* cu *ij* şi stabileşte condiţia de parallelism a segmentelor *ij* şi *kl*: $i+j\equiv k+l\,(\text{mod }2020)$;
	a) pentru $i+j=k+l$ -- 1 punct;
	b) pentru $(k+l)-(i+j)=2020$ -- 1 punct;
	c) pentru unificare, $i+j\equiv k+l\,(\text{mod }2020)$ – 1 punct.
		3 puncte

2.	Presupune, că Păcală are dreptate şi obţine $(n_1+n_2)+(n_2+n_3)+\dots+(n_{2020}+n_1)\equiv 0+1+2+3+\dots+2019\,(\text{mod }2020)$.	2 puncte
3.	Arată că $(n_1+n_2)+(n_2+n_3)+\dots+(n_{2020}+n_1)\equiv 0\,(\text{mod}\,2020)$.	1 punct
4.	Arată că suma $0+1+2+3+\dots+2019$ nu este congruentă cu 0 modulo 2020.	1 punct
5.	Contradicţie, deci Păcală nu are dreptate.	1 punct
	Punctaj total:	**7 puncte**

Remarcă: *Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.*

Problema 9.3. Bisectoarele BB_1 şi CC_1 ale triunghiului ABC se intersectează în punctul O. Măsura $\angle BOC$ este egală cu 120^0. Cercul circumscris triunghiului BC_1O intersectează latura BC în punctul D. Să se demonstreze, că $AD \perp B_1C_1$.		
Rezolvare cu barem de evaluare		
Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Este demonstrat că măsura $\angle A = 60^0$ (1p.) şi patrulaterul AB_1OC_1 este inscriptibil (1p.)	2 puncte
2.	Este demonstrat că patrulaterul OB_1CD este inscriptibil.	2 puncte
3.	A concluzionat că $\Delta AB_1C_1 \equiv \Delta DB_1C_1$.	2 puncte
4.	Punctul D este simetric punctului A în raport cu B_1C_1. De aici obţine, că $AD \perp B_1C_1$, c.t.d.	1 punct
	Punctaj total	**7 puncte**

Remarcă: *Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.*

Problema 9.4. Să se demonstreze, că pentru oricare numere pozitive a, b, c este adevărată inegalitatea $$\frac{a+b-2c}{b+c}+\frac{b+c-2a}{c+a}+\frac{c+a-2b}{a+b} \geq 0.$$ Când are loc egalitatea?		
Rezolvare cu barem de evaluare		
Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Inegalitatea se înmulţeşte cu produsul numitorilor	1 punct
2.	Obţine $a^3+b^3+c^3-2ab^2-2bc^2-2ca^2+a^2b+b^2c+c^2a \geq 0.$	2 puncte
3.	Grupează termenii: $(a^3-2a^2c+c^2a)+(b^3-2ab^2+a^2b)+(c^3-2bc^2+b^2c) \geq 0.$	1 punct
4.	Obţine $a(a^2-2ac+c^2)+b(b^2-2ab+a^2)+c(c^2-2bc+b^2) \geq 0.$	1 punct
5.	Aduce inegalitatea la forma $a(a-c)^2+b(b-a)^2+c(c-b)^2 \geq 0$, adevărată şi echivalentă inegalităţii din enunţ.	1 punct
6.	Stabileşte, că egalitatea este adevărată pentru $a=b=c$.	1 punct
	Punctaj total:	**7 puncte**

Remarcă: *Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.*