Olimpiada Republicană la Matematică
A doua zi, 1 martie 2020, Clasa a VIII–a

8.5. Fie $E = 1! \cdot 3 - 2! \cdot 4 + 3! \cdot 5 - 4! \cdot 6 + \cdots - 2018! \cdot 2020 + 2019!$, unde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.
Calculați $E^{2020} + 2019$.

8.6. Fie x și y numere reale pozitive. Aflați cea mai mică valoare posibilă a expresiei

$$E(x, y) = 16 \cdot \frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{x} - \sqrt{xy}.$$

8.7. Aflați măsura unghiului B a triunghiului ABC, dacă se știe, că înălțimile construite din vârfurile A și C se intersectează în interiorul triunghiului și una dintre ele este împărțită de punctul de intersecție în segmente congruente, iar cealaltă în raportul $2 : 1$, considerând de la vârf.

8.8. Două persoane scriu pe rând numerele naturale de la 1 la 25 în câmpurile unui tabel 5×5, astfel încât fiecare număr se scrie o singură data. Dacă după completarea întregului tabel, suma numerelor dintr-o coloană oarecare sau dintr-o linie oarecare este egală cu 70, atunci câștigă cel care a început jocul. În caz contrar, câștigă adversarul său. Cine câștigă la un joc corect și care este strategia de câștig ?

Soluții

8.5. Observăm că, $k!(k+2) = k!(k+1+1) = k!(k+1) + k! = (k+1)! + k!$. Aplicăm identitatea $k!(k+2) = (k+1)! + k!$ pentru $k = \overline{1, 2018}$ și obținem

$E = 2! + 1! - 3! - 2! + 4! + 3! - 5! - 4! + \cdots + 2018! + 2017! - 2019! - 2018! + 2019! = 1.$

$E^{2020} + 2019 = 2020.$

Răspuns: 2020.

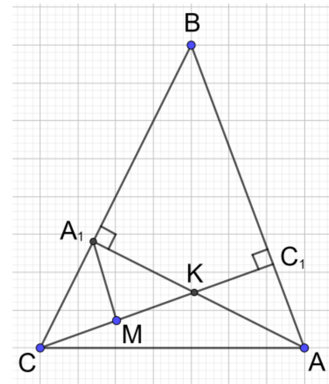
8.6. Aplicăm termenilor $16 \cdot \frac{x^3}{y}$ și $\frac{y^3}{x}$ inegalitatea dintre media aritmetică și media geometrică pentru două numere pozitive și obținem $16 \cdot \frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{x} \geq 8\sqrt{(xy)^2} = 8xy$. Deci

$$E(x, y) \geq 8xy - \sqrt{xy} = 8\left(xy - \tfrac{1}{8}\sqrt{xy}\right) = 8\left(xy - 2 \cdot \sqrt{xy} \cdot \tfrac{1}{16} + \left(\tfrac{1}{16}\right)^2 - \left(\tfrac{1}{16}\right)^2\right) = 8\left(\sqrt{xy} - \tfrac{1}{16}\right)^2 - \tfrac{1}{32}.$$

Cea mai mica valoare este $-\frac{1}{32}$ și se obține pentru $\sqrt{xy} = \frac{1}{16}$. Valorile posibile pentru x și y se obțin rezolvând sistemul: $\sqrt{xy} = \frac{1}{16}$, $16 \cdot \frac{x^3}{y} = \frac{y^3}{x}$ și $x > 0, y > 0$.

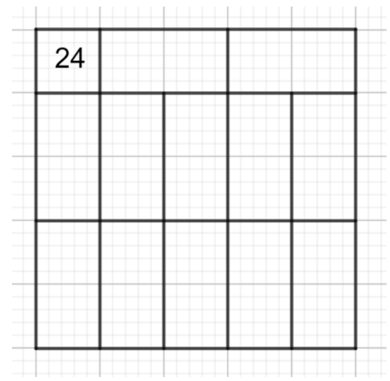
$$\begin{cases} x > 0, y > 0 \\ \sqrt{xy} = \frac{1}{16} \\ 16 \cdot \frac{x^3}{y} = \frac{y^3}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, y > 0 \\ \sqrt{xy} = \frac{1}{16} \\ 16x^4 = y^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, y > 0 \\ \sqrt{xy} = \frac{1}{16} \\ 2x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{32} \\ y = \frac{\sqrt{2}}{16} \end{cases}.$$

Răspuns: $-\frac{1}{32}$.



8.7. Fie $AA_1 \cap CC_1 = \{K\}$ și $AK = KA_1$, $CK = 2KC_1$. Dacă M este mijlocul segmentului CK, atunci $A_1M = CM = MK$. Din congruența triunghiurilor KMA_1 și KC_1A (LUL) rezultă că $AC_1 = MA_1$. În continuare avem $AC_1 = MK = KC_1$. Triunghiul KAC_1 este dreptunghic și isoscel, rezultă că $m(\angle KAC_1) = 45^\circ$. La fel, triunghiul BA_1A este dreptunghic și isoscel, deci $m(\angle ABC) = 45^\circ$.

Răspuns: 45°.



8.8. Jucătorul care începe jocul are strategie de câștig. El plasează în câmpul dintr-un colț al tabelului numărul 24. După aceasta, împarte câmpurile tabelului în perechi (vezi desenul), iar numerele rămase le împarte în 11 perechi „bune”, cu suma egală cu 23: $1 + 22, 2 + 21, 3 + 20, \dots, 11 + 12$ și perechea 23, 25. În jocul ulterior, acest jucător scrie în câmpul rămas din pereche după mișcarea adversarului, un număr rămas din perechea „bună”. Perechea 23, 25 este unică, rezultă că ea nu figurează sau în linia sau în coloana care conține numărul 24. Numărul 24, în sumă cu două perechi „bune” dă rezultatul 70.