Olimpiada Republicană la Matematică
Ziua a doua, 1 martie 2020, Clasa a VIII–a
Barem de evaluare

8.5. Fie $E = 1! \cdot 3 - 2! \cdot 4 + 3! \cdot 5 - 4! \cdot 6 + \cdots - 2018! \cdot 2020 + 2019!$, unde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.
Calculați $E^{2020} + 2019$.

Etape ale rezolvării cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Argumentează că $k!\,(k+2) = (k+1)! + k!$	2p
2	Aplică identitatea menționată pentru $k = \overline{1, 2018}$	2p
3	Obține $E = 1$	2p
4	Calculează valoarea expresiei $E^{2020} + 2019$	1p
	Punctaj total	**7 puncte**

Remarcă: *Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.*

8.6. Fie x și y numere reale pozitive. Aflați cea mai mică valoare posibilă a expresiei

$$E(x,y) = 16 \cdot \frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{x} - \sqrt{xy}.$$

Etape ale rezolvării cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Aplică termenilor $16 \cdot \frac{x^3}{y}$ și $\frac{y^3}{x}$ inegalitatea dintre media aritmetică și media geometrică pentru două numere pozitive	1p
2	Obține $16 \cdot \frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{x} \geq 8xy$	1p
3	Argumentează că $E(x,y) \geq 8xy - \sqrt{xy} = 8\left(\sqrt{xy} - \frac{1}{16}\right)^2 - \frac{1}{32}$	1p
4	Indică: cea mai mica valoare a expresiei din enunț este $-\frac{1}{32}$ și se obține pentru $\sqrt{xy} = \frac{1}{16}$	1p
5	Argumentează că valorile posibile pentru x și y se obțin rezolvând sistemul: $\sqrt{xy} = \frac{1}{16}, 16 \cdot \frac{x^3}{y} = \frac{y^3}{x}$ și $x > 0, y > 0.$	1p
6	Rezolvă corect sistemul și scrie răspunsul corect	2p
	Punctaj total	**7 puncte**

Remarcă: *Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.*

8.7. Aflați măsura unghiului B a triunghiului ABC, dacă se știe, că înălțimile construite din vârfurile A și C se intersectează în interiorul triunghiului și una dintre ele este împărțită de punctul de intersecție în segmente congruente, iar cealaltă în raportul $2:1$, considerând de la vârf.		
Etape ale rezolvării cu barem de evaluare		
Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Indică $AA_1 \cap CC_1 = \{K\}$ și $AK = KA_1, CK = 2KC_1$	1p
2	Notează cu M mijlocul segmentului CK și argumentează că $A_1M = CM = MK$	1p
3	Argumentează congruența triunghiurilor KMA_1 și KC_1A	1p
4	Obține $AC_1 = MA_1$.	1p
5	Argumentează că triunghiul KAC_1 este dreptunghic și isoscel	1p
6	Obține $m(\angle KAC_1) = 45^\circ$	1p
7	Argumentează că triunghiul BA_1A este dreptunghic și isoscel și $m(\angle ABC) = 45^\circ$	1p
	Punctaj total	**7 puncte**

Remarcă: *Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.*

8.8. Două persoane scriu pe rând numerele naturale de la 1 la 25 în câmpurile unui tabel 5×5, astfel încât fiecare număr se scrie o singură data. Dacă după completarea întregului tabel, suma numerelor dintr-o coloană oarecare sau dintr-o linie oarecare este egală cu 70, atunci câștigă cel care a început jocul. În caz contrar, câștigă adversarul său. Cine câștigă la un joc corect și care este strategia de câștig ?		
Etape ale rezolvării cu barem de evaluare		
Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Indică că jucătorul care începe jocul, la prima mișcare, plasează în câmpul dintr-un colț al tabelului numărul 24	1p
2	Împarte câmpurile tabelului în perechi (vezi des. din soluții)	1p
3	Împarte numerele în 11 perechi „bune”, cu suma egală cu 23 și perechea 23, 25	2p
4	În jocul ulterior, acest jucător scrie în câmpul rămas din pereche după mișcarea adversarului, un număr rămas din perechea „bună”	1p
5	Scrie afirmația adevărată: perechea 23, 25 este unică, rezultă că ea nu figurează sau în linia sau în coloana care conține numărul 24	1p
6	Arată, că jucătorul care începe jocul, câștigă	1p
	Punctaj total	**7 puncte**

Remarcă: *Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.*