Olimpiada Republicană la Matematică
Prima zi, 29 februarie 2020, Clasa a VIII–a

8.1. Alina scrie un număr natural A de trei cifre. Apoi ea calculează suma cifrelor şi produsul cifrelor numărului A, şi adună aceste două numere. Poate Alina să obţină ca rezultat numărul iniţial A? Argumentaţi răspunsul.

8.2. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: $(x^2 - x - 1)^2 - x^3 = 5$.

8.3. În triunghiul ascuțitunghic ABC sunt duse bisectoarele AA_1 și CC_1. Demonstrați, că dacă lungimile perpendicularelor, construite din punctul B la dreptele AA_1 și CC_1 sunt egale, atunci triunghiul ABC este isoscel.

8.4. Demonstrați, că pentru orice numere reale pozitive a, b și c este adevărată inegalitatea

$$\frac{a^2}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^2}{(b+c)(b+a)} + \frac{c^2}{(c+a)(c+b)} \geq \frac{3}{4}.$$

Soluții

8.1. Presupunem, că Alina poate să obţină ca rezultat numărul iniţial A și acest număr este egal cu N, $N = \overline{abc} = 100a + 10b + c$. Atunci $\overline{abc} = abc + a + b + c \quad \Leftrightarrow \quad a(100 - bc - 1) + b(10 - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow$ $a(99 - bc) + 9b = 0$.

Dar $bc \leq 9 \cdot 9 = 81 \quad \Rightarrow \quad 99 - bc > 0 \quad \Rightarrow \quad a(99 - bc) + 9b > 0$. Deci, Alina nu poate să obţină ca rezultat numărul iniţial A.

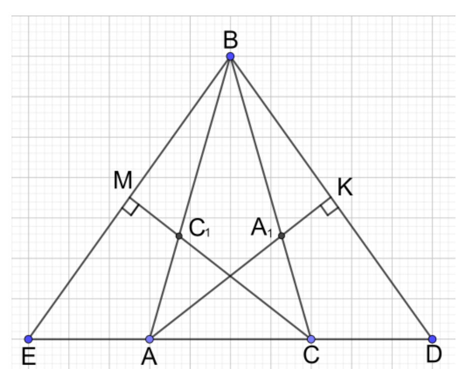
8.2. $(x^2 - x - 1)^2 - x^3 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad (x^2 - x - 1)^2 - 4 - x^3 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$(x^2 - x - 3)(x^2 - x + 1) - (x + 1)(x^2 - x + 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x^2 - x + 1)(x^2 - 2x - 4) = 0 \quad \Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l} x^2 - x + 1 = 0 \\ x^2 - 2x - 4 = 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 1 - \sqrt{5} \\ x = 1 + \sqrt{5} \end{array}\right.$. Ecuația $x^2 - x + 1 = 0$ n-are soluții deoarece discriminantul ei este negativ.

Răspuns: $S = \{1 - \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5}\}$.

8.3. Prelungim perpendicularele BM și BK până la intersecția cu dreapta AC. În triunghiurile BCE și BAD, bisectoarele CM și AK sunt înălțimi. Deci triunghiurile BCE și BAD sunt isoscele. În continuare, avem $BC = CE$, $BA = AD$ și $BE = 2BM = 2BK = BD$ rezultă că triunghiul BED este isoscel și $\angle BED \equiv \angle BDE$. Conform criteriului ULU, triunghiurile CEB și ADB sunt congruente. Obținem că, $BA = BC$ și triunghiul ABC este isoscel. Demonstraţia nu depinde de poziţiile punctelor M şi K faţă de triunghiul ABC.



8.4. Aducem membrul stâng al inegalității din enuț la numitor comun

$\frac{a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{a^2b+b^2a+b^2c+c^2b+c^2a+a^2c}{2abc+a^2b+b^2a+b^2c+c^2b+c^2a+a^2c}$. Deoarece $a, b, c > 0$, inegalitatea inițială este echivalentă cu inegalitatea

$4(a^2b + b^2a + b^2c + c^2b + c^2a + a^2c) \geq 3(2abc + a^2b + b^2a + b^2c + c^2b + c^2a + a^2c)$ sau

$$a^2b + b^2a + b^2c + c^2b + c^2a + a^2c - 6abc \geq 0.$$

Ultima inegalitate poate fi scrisă în forma

$(a^2b + c^2b - 2abc) + (b^2a + c^2a - 2abc) + (b^2c + a^2c - 2abc) \geq 0 \quad \Leftrightarrow$

$b(a-c)^2 + a(b-c)^2 + c(b-a)^2 \geq 0$ - inegalitate adevărată, deoarece toți termenii sunt nenegativi.