Республиканская Олимпиада по Математике
Первый день, 29 февраля 2020 года, VIII -й класс

Схема оценивания

8.1. Алина пишет трехзначное число A. Затем она вычисляет сумму цифр и произведение цифр числа A, и складывает эти два числа. Может ли Алина получить в итоге исходное число A? Аргументируйте ответ.

Этапы решения со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1	Предполагает, что Алина может получить в итоге исходное число A	1
2	Указывает, что $N = \overline{abc} = 100a + 10b + c$	1
3	Пишет $\overline{abc} = abc + a + b + c$	1
4	Получает $a(99 - bc) + 9b = 0$	1
5	Аргументирует, что $bc \leq 9 \cdot 9 = 81$	1
6	Аргументирует, что $a(99 - bc) + 9b > 0$	1
7	Пишет вывод, что Алина не может получить в итоге исходное число A	1
	Общее количество баллов	**7 баллов**

Примечание: *Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.*

....

8.2. Решите в действительных числах уравнение: $(x^2 - x - 1)^2 - x^3 = 5$.

Этапы решения со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1	Пишет левый член уравнения в виде $(x^2 - x - 1)^2 - 4 - x^3 - 1$	1
2	Применяет формулу для разницы квадратов и формулу для суммы кубов двух действительных чисел	2
3	Получает уравнение $(x^2 - x + 1)(x^2 - 2x - 4) = 0$	1
4	Пишет совокупность $x^2 - x + 1 = 0$ или $x^2 - 2x - 4 = 0$	1
5	Аргументирует, что уравнение $x^2 - x + 1 = 0$ не имеет решений	1
6	Получает множество решений исходного уравнения	1
	Общее количество баллов	**7 баллов**

Примечание: *Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.*

8.3. В остроугольном треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1 и CC_1. Докажите, что если длины перпендикуляров, опущенных из вершины B на прямые AA_1 и CC_1 равны, то треугольник ABC – равнобедренный.		
Этапы решения со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1	Продолжает перпендикуляры BM и BK до пересечения с прямой AC, $M \in CC_1, K \in AA_1$	1
2	Указывает, что в треугольниках BCE и BAD, биссектрисы CM и AK являются высотами	1
3	Получает, что треугольники BCE и BAD - равнобедренные	1
4	Аргументирует, что треугольник BED - равнобедренный	1
5	Указывает $\angle BED \equiv \angle BDE$	1
6	Доказывает конгруентность треугольников CEB и ADB	1
7	Получает, что треугольник ABC - равнобедренный	1
	Общее количество баллов	**7 баллов**

Примечание: *Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.*

....

8.4. Докажите, что для любых действительных положительных чисел $a,\ b$ и c справедливо неравенство $$\frac{a^2}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^2}{(b+c)(b+a)}+\frac{c^2}{(c+a)(c+b)} \geq \frac{3}{4}.$$		
Этапы решения со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1	Приводит левый член неравенства к общему знаменателю	1
2	Пишет левый член неравенства в виде $\frac{a^2b+b^2a+b^2c+c^2b+c^2a+a^2c}{2abc+a^2b+b^2a+b^2c+c^2b+c^2a+a^2c}$	1
3	Получает эквивалетное неравенство $a^2b+b^2a+b^2c+c^2b+c^2a+a^2c-6abc \geq 0$	2
4	Получает эквивалетное неравенство $(a^2b+c^2b-2abc)+(b^2a+c^2a-2abc)+(b^2c+a^2c-2abc) \geq 0$	1
5	Указывает эквивалетное неравенство $b(a-c)^2+a(b-c)^2+c(b-a)^2 \geq 0$	1
6	Доказывает, что исходное неравенство - верно	1
	Общее количество баллов	**7 баллов**

Примечание: *Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.*