Olimpiada Republicană la Matematică
Prima zi, 29 februarie 2020, Clasa a VIII–a

Barem de evaluare

8.1. Alina scrie un număr natural *A* de trei cifre. Apoi ea calculează suma cifrelor şi produsul cifrelor numărului *A*, şi adună aceste două numere. Poate Alina să obţină ca rezultat numărul iniţial *A*? Argumentați răspunsul.		
Etape ale rezolvării cu barem de evaluare		
Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Presupune, că Alina poate să obţină ca rezultat numărul iniţial *A*	1p
2	Indică $N = \overline{abc} = 100a + 10b + c$	1p
3	Scrie $\overline{abc} = abc + a + b + c$	1p
4	Obține $a(99 - bc) + 9b = 0$	1p
5	Argumentează că $bc \leq 9 \cdot 9 = 81$	1p
6	Argumentează că $a(99 - bc) + 9b > 0$	1p
7	Scrie concluzia, că Alina nu poate să obţină ca rezultat numărul iniţial *A*	1p
	Punctaj total	**7 puncte**

Remarcă: *Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.*

....

8.2. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: $(x^2 - x - 1)^2 - x^3 = 5$.		
Etape ale rezolvării cu barem de evaluare		
Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Scrie membrul stâng al ecuației în forma $(x^2 - x - 1)^2 - 4 - x^3 - 1$	1p
2	Aplică diferența pătratelor și suma cuburilor pentru două numere reale	2p
3	Obține ecuația $(x^2 - x + 1)(x^2 - 2x - 4) = 0$	1p
4	Scrie totalitatea $x^2 - x + 1 = 0$ sau $x^2 - 2x - 4 = 0$	1p
5	Argumentează, că ecuația $x^2 - x + 1 = 0$ n-are soluții	1p
6	Obține mulțimea soluțiilor ecuației din enunț	1p
	Punctaj total	**7 puncte**

Remarcă: *Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.*

8.3. În triunghiul ascuțitunghic ABC sunt duse bisectoarele AA_1 și CC_1. Demonstrați, că dacă lungimile perpendicularelor, construite din punctul B la dreptele AA_1 și CC_1 sunt egale, atunci triunghiul ABC este isoscel.		
Etape ale rezolvării cu barem de evaluare		
Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Prelungește perpendicularele BM și BK până la intersecția cu dreapta AC, $M \in CC_1, K \in AA_1$	1p
2	Indică că în triunghiurilr BCE și BAD, bisectoarele CM și AK sunt înălțimi	1p
3	Obține că triunghiurile BCE și BAD sunt isoscele	1p
4	Argumentează că triunghiul BED este isoscel	1p
5	Indică $\angle BED \equiv \angle BDE$	1p
6	Demonstrează congruența triunghiurilor CEB și ADB	1p
7	Obține că triunghiul ABC este isoscel	1p
	Punctaj total	**7 puncte**

Remarcă: *Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.*

....

8.4. Demonstrați, că pentru orice numere reale pozitive a, b și c este adevărată inegalitatea $$\frac{a^2}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^2}{(b+c)(b+a)}+\frac{c^2}{(c+a)(c+b)} \geq \frac{3}{4}.$$		
Etape ale rezolvării cu barem de evaluare		
Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Aduce membrul stâng al inegalității din enunț la numitor comun	1p
2	Scrie membrul stâng în forma $\frac{a^2b+b^2a+b^2c+c^2b+c^2a+a^2c}{2abc+a^2b+b^2a+b^2c+c^2b+c^2a+a^2c}$	1p
3	Obține inegalitatea echivalentă $a^2b+b^2a+b^2c+c^2b+c^2a+a^2c-6abc \geq 0$	2p
4	Obține inegalitatea echivalentă $(a^2b+c^2b-2abc)+(b^2a+c^2a-2abc)+(b^2c+a^2c-2abc) \geq 0$	1p
5	Indică inegalitatea echivalentă $b(a-c)^2+a(b-c)^2+c(b-a)^2 \geq 0$	1p
6	Arată că inegalitatea din enunț este adevărată	1p
	Punctaj total	**7 puncte**

Remarcă: *Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.*