Olimpiada Republicană la Matematică
A doua zi, 01 martie 2020, Clasa a VII–a

Soluții

7.5. Aflați cel mai mare număr natural *n* pentru care 3^n divide numărul $a = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2020$.

Rezolvare:

Fie șirul de numere $1,\ 2,\ 3, \ldots, 2019,\ 2020$. Fiecare al treilea număr din șirul dat este divizibil cu 3. Deoarece $2020 = 3 \cdot 673 + 1$, rezultă că în șir sunt 673 numere divizibile cu 3. Dintre aceste 673 numere, fiecare al treilea este divizibil cu 3^2. Deoarece $673 = 3 \cdot 224 + 1$, rezultă că avem 224 astfel de numere. Procedând la fel, aflăm câte numere din șirul dat se divid cu 3^3, 3^4, 3^5, ș.a.m.d. La împărțirile efectuate am avut nevoie doar de câturile acestora, acestea fiind părțile întregi ale numerelor $2020 : 3,\ 2020 : 3^2$, etc. Deoarece $3^6 = 729$ și $3^7 = 2181$, obținem $n = \left[\frac{2020}{3}\right] + \left[\frac{2020}{3^2}\right] + \left[\frac{2020}{3^3}\right] + \left[\frac{2020}{3^4}\right] + \left[\frac{2020}{3^5}\right] + \left[\frac{2020}{3^6}\right] = 673 + 224 + 74 + 24 + 8 + 2 = 1005$

Răspuns: $n = 1005$.

7.6. Se consideră numerele: $a = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + 2020^2$; $b = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + 2019^2$; $c = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + 2019 \cdot 2020$. Calculați valoarea expresiei $E = \frac{a-b}{a+b-c}$.

Rezolvare:

$a - b = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + 2020^2 - (1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + 2019^2) = (2^2 - 1^2) + (4^2 - 3^2) + (6^2 - 5^2) + \ .\ .\ . + (2020^2 - 2019^2) = 3 + 7 + 11 + \ .\ .\ . + 4039 = 4042 \cdot 505$.
$a + b - c = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ .\ .\ . + 2020^2 - (1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ .\ .\ . + 2019 \cdot 2020) = 1 + (2^2 - 1 \cdot 2) + (3^2 - 2 \cdot 3) + (4^2 - 3 \cdot 4) + \ .\ .\ . + (2020^2 - 2019 \cdot 2020) = 1 + 2 + 3 + \ .\ .\ . + 2020 = 2021 \cdot 1010 = 4042 \cdot 505$.
Deci $E = 1$.

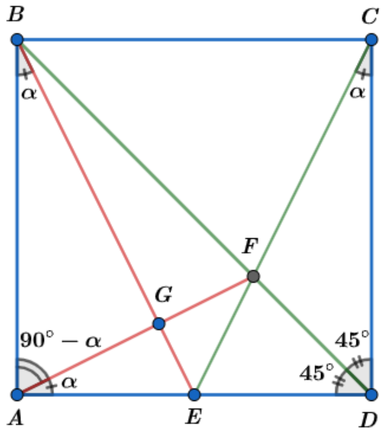
Răspuns: $E = 1$.

7.7. Fie $ABCD$ un pătrat, iar punctul E este mijlocul laturii AD. Dacă $BD \cap CE = \{F\}$, demonstrați că $AF \perp BE$

Demonstrație:

Considerăm ΔBAE și ΔCDE. Deoarece $\left.\begin{array}{c} AB = CD \\ AE = ED \\ m(\measuredangle BAE) = 90^\circ = m(\measuredangle CDE) \end{array}\right\} \overset{L.U.L}{\Longrightarrow} \Delta BAE \equiv \Delta CDE \Rightarrow$ $m(\measuredangle ABE) = m(\measuredangle DCE) = \alpha$.

Considerăm ΔAFD și ΔCFD. Deoarece $\left.\begin{array}{c} AD = CD \\ FD - \text{latură comună} \\ m(\measuredangle FDA) = 45^\circ = m(\measuredangle FDC) \end{array}\right\} \overset{L.U.L}{\Longrightarrow} \Delta AFD \equiv \Delta CFD \Rightarrow$ $m(\measuredangle FAD) = m(\measuredangle ECD) = \alpha$. Deoarece $m(\measuredangle FAD) = \alpha \Rightarrow m(\measuredangle GAB) = 90^\circ - \alpha$, unde $BE \cap AF = \{G\}$.
Din ΔABG $m(\measuredangle BGA) = 180^\circ - m(\measuredangle ABG) - m(\measuredangle BAG) = 90^\circ$. Astfel obținem $AF \perp BE$.



7.8. Andrei a înmulțit două numere naturale impare consecutive, iar Bogdan a înmulțit trei numere naturale impare consecutive. Este posibil ca rezultatul obținut de Andrei să fie cu 2020 mai mare decât rezultatul obținut de Bogdan? Argumentați răspunsul.

Rezolvare:

Răspunsul este ”*Nu*”.

Să presupunem că situația din problemă este posibilă. Observăm că rezultatul înmulțirii a trei numere impare consecutive se divide cu 3, deci Bogdan a obținut un număr de forma $3n$. Dacă admitem că Andrei a înmulțit numerele $2m-1$ și $2m+1$, atunci el a obținut numărul $4m^2-1$. Deci, obținem egalitatea $4m^2-1=3n+2020$, sau $(2m)^2=3n+2021=3\cdot(n+673)+2$. Dar pătratele numerelor întregi, prin împărțirea cu 3, pot avea doar resturile 0 și 1. Contradicție.