OLIMPIADA REPUBLICANĂ LA MATEMATICĂ
a doua zi, 01 martie 2020, Clasa a VII – a
BAREM DE EVALUARE

7.5. Aflați cel mai mare număr natural *n* pentru care 3^n divide numărul $a = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 2020$

Rezolvare cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Deducerea că fiecare al treilea număr din șirul dat este divizibil cu 3 și obținerea că șirul conține 673 de numere divizibile cu 3.	1p.
2	Deducerea că din cele 673 de numere, fiecare al treilea este divizibil cu 3^2și obținerea a 224 astfel de numere.	1p.
3	Deducerea că din cele 224 de numere, 74 sunt divizibile cu 3^3.	1p.
4	Deducerea că din cele 74 de numere, 24 sunt divizibile cu 3^4.	1p.
5	Deducerea că din cele 24 de numere, 8 sunt divizibile cu 3^5.	1p.
6	Deducerea că din cele 8 de numere, 2 sunt divizibile cu 3^6.	1p.
7	Obținerea că $n = 1005$	1p.
	Punctaj total	7 puncte

Remarcă: *Rezolvarea corectă a fiecărei probleme se apreciază cu 7 puncte.*

7.6. Se consideră numerele: $a = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + 2020^2$; $b = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + 2019^2$; $c = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + 2019 \cdot 2020$. Calculați valoarea expresiei $E = \frac{a-b}{a+b-c}$.

Etape ale rezolvării cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Obținerea că $a - b = 3 + 7 + 11 + \ . \ . \ . + 4039 = 4042 \cdot 505$.	2p.
2	Obținerea că $a + b - c = 1 + (2^2 - 1 \cdot 2) + (3^2 - 2 \cdot 3) + (4^2 - 3 \cdot 4) + \ . \ . \ . + (2020^2 - 2019 \cdot 2020)$	2p.
3	Obținerea că $1 + (2^2 - 1 \cdot 2) + (3^2 - 2 \cdot 3) + (4^2 - 3 \cdot 4) + \ . \ . \ . + (2020^2 - 2019 \cdot 2020) = 1 + 2 + 3 + \ . \ . \ . + 2020 = 4042 \cdot 505$.	2p.
4	Obținerea $E = 1$.	1p.
	Punctaj total	7 puncte

Remarcă: *Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.*

7.7. Fie $ABCD$ un pătrat, iar punctul E este mijlocul laturii AD. Dacă $BD \cap CE = \{F\}$, demonstrați că $AF \perp BE$		
Etape ale rezolvării cu barem de evaluare		
Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Demonstrare că $\Delta BAE \equiv \Delta CDE$	1p.
2	Obținerea $m(\measuredangle ABE) = m(\measuredangle DCE) = \alpha$.	1p.
3	Demonstrarea că $\Delta AFD \equiv \Delta CFD$	2p.
4	Obținerea $m(\measuredangle FAD) = m(\measuredangle ECD) = \alpha$.	1p.
5	Obținerea $m(\measuredangle BGA) = 90^{\circ}$, unde $BE \cap AF = \{G\}$	2p.
	Punctaj total	7 puncte

Remarcă: *Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.*

7.8. Andrei a înmulțit două numere naturale impare consecutive, iar Bogdan a înmulțit trei numere naturale impare consecutive. Este posibil ca rezultatul obținut de Andrei să fie cu 2020 mai mare decât rezultatul obținut de Bogdan? Argumentați răspunsul.		
Etape ale rezolvării cu barem de evaluare		
Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Deducerea că numărul obținut de Bogdan are forma $3n$.	2p.
2	Obținerea ecuației $4m^2 - 1 = 3n + 2020$	2p.
3	Aducerea ecuației la forma $(2m)^2 = 3 \cdot (n + 673) + 2$	1p.
4	Utilizarea faptului că pătratele numerelor întregi, prin împărțirea cu 3, pot avea doar resturile 0 și 1	1p.
5	Obținerea că rezultatul obținut de Andrei nu poate fi cu 2020 mai mare decât rezultatul obținut de Bogdan	1p.
	Punctaj total	7 puncte

Remarcă: *Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.*

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
01 марта 2020, 7-й класс

Схема оценивания

7.5. Найдите наибольшее натуральное число n, для которого 3^n является делителем числа $a = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2020$

Этапы решения со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1	Вывел, что каждое третье число данного ряда делится на 3 и получил что ряд содержит 673 таких чисел	1 б.
2	Вывел, что данных 673 чисел, каждое третье число делится на 3 и получил что таких чисел 224	1 б.
3	Вывел, что данных 224 чисел, каждое третье число делится на 3 и получил что таких чисел 74	1 б.
4	Вывел, что данных 74 чисел, каждое третье число делится на 3 и получил что таких чисел 24	1 б.
5	Вывел, что данных 24 чисел, каждое третье число делится на 3 и получил что таких чисел 8	1 б.
6	Вывел, что данных 8 чисел, каждое третье число делится на 3 и получил что таких чисел 2	1 б.
7	Получил, что $n = 1005$.	1 б.
	Общая сумма баллов	7 баллов

Примечание: *Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.*

7.6. Заданы числа: $a = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + 2020^2$; $b = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + 2019^2$; $c = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + 2019 \cdot 2020$. Вычислите значение выражения $E = \frac{a-b}{a+b-c}$

Этапы решения со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1	Получил, что $a - b = 3 + 7 + 11 + \ . \ . \ . + 4039 = 4042 \cdot 505$	2 б.
2	Получил, что $+b - c = 1 + (2^2 - 1 \cdot 2) + (3^2 - 2 \cdot 3) + (4^2 - 3 \cdot 4) + \ . \ . \ . + (2020^2 - 2019 \cdot 2020)$	2 б.
3	Получил, что $1 + (2^2 - 1 \cdot 2) + (3^2 - 2 \cdot 3) + (4^2 - 3 \cdot 4) + \ . \ . \ . + (2020^2 - 2019 \cdot 2020) = 1 + 2 + 3 + \ . \ . \ . + 2020 = 4042 \cdot 505$	2 б.
4	Получил, что $E = 1$	1 б.
	Общая сумма баллов	7 баллов

Примечание: *Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.*

7.7. Задан квадрат $ABCD$, в котором точка E является серединой стороны AD. Зная что $BD \cap CE = \{F\}$, докажите что $AF \perp BE$		
Этапы решения со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1	Доказал, что $\Delta BAE \equiv \Delta CDE$	1 б.
2	Получил, что $m(\measuredangle ABE) = m(\measuredangle DCE) = \alpha$.	1 б.
3	Доказал, что $\Delta AFD \equiv \Delta CFD$	2 б.
4	Получил, что $m(\measuredangle FAD) = m(\measuredangle ECD) = \alpha$.	1 б.
5	Получил, что $(\measuredangle BGA) = 90^{\circ}$, где $BE \cap AF = \{G\}$	2 б.
	Общая сумма баллов	7 баллов

Примечание: *Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.*

7.8. Андрей умножил два последовательных нечётных натуральных числа, а Богдан умножил три последовательных нечётных натуральных числа. Возможно ли чтобы в результате Андрей получил число на 2020 большее чем число, полученное Богданом? Обоснуйте ответ		
Этапы решения со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1	Вывел что число, полученное Богданом имеет вид $3n$.	2 б.
2	Получил уравнение $4m^2 - 1 = 3n + 2020$	2 б.
3	Привёл уравнение к виду $(2m)^2 = 3 \cdot (n + 673) + 2$	1 б.
4	Использовал свойство что квадраты натуральных чисел, при делении на 3, дают остатки 0 и 1	1 б.
5	Вывел, что результат полученный Андреем не может быть на 2020 больше чем результат полученный Богданом	1 б.
	Общая сумма баллов	7 баллов

Примечание: *Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.*