

OLIMPIADA REPUBLICANĂ LA MATEMATICĂ
prima zi, 29 februarie 2020, Clasa a VII – a
BAREM DE EVALUARE

7.1. Pe un vapor s-au întâlnit 100 de persoane, fiecare fiind cetățean al unuia dintre orașele A , B sau C . Fiecare cetățean al orașului A întotdeauna spune adevărul, fiecare cetățean al orașului B întotdeauna minte, iar fiecare cetățean al orașului C după orice minciună spune un adevăr, iar după fiecare adevăr spune o minciună, dar nu se știe cu ce începe. Căpitanul vaporului, dorind să afle câți cetățeni sunt din fiecare oraș, le-a adresat tuturor celor 100 de persoane trei întrebări. La prima întrebare "Sunteți din orașul A ?" au răspuns afirmativ 60 de persoane. La a doua întrebare "Sunteți din orașul C ?" au răspuns afirmativ 45 de persoane, iar la a treia întrebare "Sunteți din orașul B ?" au răspuns afirmativ 37 de persoane. Determinați numărul de cetățeni din fiecare oraș și câte persoane din orașul C au spus adevărul, răspunzând la prima întrebare?

Rezolvare cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Deducerea că numărul de persoane din orașul C care la prima întrebare spun adevărul este 40.	2p.
2	Deducerea că numărul de persoane din orașul B este 5.	2p.
3	Deducerea că numărul de persoane din orașul C care la prima întrebare mint este 37.	2p.
4	Obținerea că numărul de persoane din orașul A este 18.	1p.
	Punctaj total	7 puncte

Remarcă: Rezolvarea corectă a fiecărei probleme se apreciază cu 7 puncte.

7.2. Fie triunghiul ABC cu înălțimile BE și CF , $E \in (AC)$, $F \in (AB)$. Punctul P aparține segmentului (BE) astfel încât $BP = AC$, iar punctul Q aparține prelungirii segmentului (CF) , astfel încât $F \in (CQ)$ și $CQ = AB$. Determinați măsura unghiului QAP .

Etape ale rezolvării cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Construirea desenului complet	1p.
2	Obținerea că $m(\sphericalangle FBO) = m(\sphericalangle ECO)$	1p.
3	Demonstrarea că $\triangle ABP \equiv \triangle QCA$	2p.
4	Deducerea că $m(\sphericalangle BAP) = m(\sphericalangle CQA)$	1p.
5	Obținerea că $m(\sphericalangle QAP) = 90^\circ$	2p.
	Punctaj total	7 puncte

Remarcă: Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.

7.3. Determinați toate cifrele (a, b, c, m, n) pentru care $\overline{0, (abc) \cdot 3, (mn)} = 3$.		
Etape ale rezolvării cu barem de evaluare		
Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Obținerea $\overline{0, (abc) \cdot 3, (mn)} = 3 \Leftrightarrow \frac{\overline{abc}}{999} \cdot \frac{297 + \overline{mn}}{99} = 3$	2p.
2	Obținerea $\overline{abc} \cdot (297 + \overline{mn}) = 3^6 \cdot 11 \cdot 37$	1p.
3	Deducerea $\overline{mn} = 36$	2p.
4	Obținerea $\overline{abc} = 891$	2p.
	Punctaj total	7 puncte

Remarcă: Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.

7.4. Determinați numerele naturale prime a, b, c , știind că:		
$\frac{2a + 4b - c + 7}{a + 3b + c + 2} = \frac{5a + b + 3c - 22}{a - 2b + 2c + 30} = \frac{c - 3b - 6a - 14}{3b + 3c - 90}$		
Etape ale rezolvării cu barem de evaluare		
Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Utilizarea proprietății șirurilor de rapoarte egale și scrierea $\frac{2a + 4b - c + 7}{a + 3b + c + 2} = \frac{5a + b + 3c - 22}{a - 2b + 2c + 30} = \frac{c - 3b - 6a - 14}{3b + 3c - 90} = \frac{a + 2b + 3c - 29}{2a + 4b + 6c - 58}$	1p.
2	Obținerea $\frac{2a + 4b - c + 7}{a + 3b + c + 2} = \frac{5a + b + 3c - 22}{a - 2b + 2c + 30} = \frac{c - 3b - 6a - 14}{3b + 3c - 90} = \frac{1}{2}$	1p.
3	Din $\frac{2a+4b-c+7}{a+3b+c+2} = \frac{1}{2}$ obținerea $3a + 5b - 3c + 12 = 0$	1p.
4	Argumentarea că $b = 3$.	2p.
5	Argumentarea că $a = 2$.	1p.
6	Argumentarea că $c = 11$.	1p.
	Punctaj total	7 puncte

Remarcă: Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

29 февраля 2020, 7-й класс

Схема оценивания

7.1. Все 100 пассажиров, находящихся на некотором корабле, являются гражданами городов А, В или С. Каждый гражданин города А всегда говорит правду, каждый гражданин города В всегда говорит неправду, а каждый гражданин города С всегда после неправды говорит правду, а после правды говорит неправду, но неизвестно с чего начинается. Капитан, желая узнать сколько на корабле пассажиров из каждого из городов А, В, С, задал всем 100 пассажирам три вопроса. На первый вопрос «Вы из города А?» 60 человек ответили «Да». На второй вопрос «Вы из города С?» 45 человек ответили «Да», а на третий вопрос «Вы из города В?» 37 человек ответили «Да». Сколько граждан каждого из этих городов находится на корабле и сколько граждан города С сказали правду, отвечая на первый вопрос?

Этапы решения со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1	Получил, что 40 человек города С сказали правду, отвечая на первый вопрос	2 б.
2	Получил, что 8 человек являются гражданами города В	2 б.
3	Получил, что 37 человек города С сказали неправду, отвечая на первый вопрос	2 б.
4	Получил, что 18 человек являются гражданами города А	1 б.
	Общая сумма баллов	7 баллов

Примечание: Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.

7.2. Задан треугольник ABC , где BE и CF являются высотами, $E \in (AC)$, $F \in (AB)$. Точка P принадлежит отрезку (BE) таким образом, что $BP = AC$, а точка Q принадлежит продолжению отрезка (CF) , таким образом, что $F \in (CQ)$ и $CQ = AB$. Определите величину угла QAP

Этапы решения со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1	Построение правильного рисунка	1 б.
2	Получил, что $m(\sphericalangle FBO) = m(\sphericalangle ECO)$	1 б.
3	Доказал, что $\triangle ABP \equiv \triangle QCA$	2 б.
4	Получил, что $m(\sphericalangle BAP) = m(\sphericalangle CQA)$	1 б.
5	Получил, что $m(\sphericalangle QAP) = 90^\circ$	1 б.
	Общая сумма баллов	7 баллов

Примечание: Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.

7.3. Найдите все цифры (a, b, c, m, n) для которых $\overline{0, (abc)} \cdot \overline{3, (mn)} = 3$		
Этапы решения со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1	Получил, что $\overline{0, (abc)} \cdot \overline{3, (mn)} = 3 \Leftrightarrow \frac{\overline{abc}}{999} \cdot \frac{297 + \overline{mn}}{99} = 3$	2 б.
2	Получил, что $\overline{abc} \cdot (297 + \overline{mn}) = 3^6 \cdot 11 \cdot 37$	1 б.
3	Получил, что $\overline{mn} = 36$	2 б.
4	Получил, что $\overline{abc} = 891$	2 б.
	Общая сумма баллов	7 баллов

Примечание: Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.

7.4. Найдите все простые числа (a, b, c) , для которых выполняется равенство:		
$\frac{2a + 4b - c + 7}{a + 3b + c + 2} = \frac{5a + b + 3c - 22}{a - 2b + 2c + 30} = \frac{c - 3b - 6a - 14}{3b + 3c - 90}.$		
Этапы решения со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1	Написал, что $\frac{2a + 4b - c + 7}{a + 3b + c + 2} = \frac{5a + b + 3c - 22}{a - 2b + 2c + 30} = \frac{c - 3b - 6a - 14}{3b + 3c - 90} = \frac{a + 2b + 3c - 29}{2a + 4b + 6c - 58}$	1 б.
2	Получил, что $\frac{2a + 4b - c + 7}{a + 3b + c + 2} = \frac{5a + b + 3c - 22}{a - 2b + 2c + 30} = \frac{c - 3b - 6a - 14}{3b + 3c - 90} = \frac{1}{2}$	1 б.
3	Из $\frac{2a+4b-c+7}{a+3b+c+2} = \frac{1}{2}$ получил, что $3a + 5b - 3c + 12 = 0$	1 б.
4	Доказал, что $b = 3$	2 б.
5	Доказал, что $a = 2$	1 б.
6	Доказал, что $c = 11$	1 б.
	Общая сумма баллов	7 баллов

Примечание: Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.