Республиканская Олимпиада по Математике
Второй день, 1 марта 2020 года, XII-й класс

Схема оценивания

12.5. Дана непрерывная функция $f\colon(1;\ +\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+1)^5}}$. Найдите первообразные $F\colon(1;\ +\infty)\to\mathbb{R}$ функции f.		
Этапы решения со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	$\int\frac{xdx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+1)^5}}=\int\frac{xdx}{(x-1)(x+1)\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}}}=$	1 балл
2.	$=\left\lvert\begin{array}{c} t=\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}} \\ x=\frac{2}{t^4-1}+1 \\ dx=-\frac{8t^3}{(t^4-1)^2}dt\end{array}\right\rvert=$	2 балла
3.	$=\int\frac{\frac{2}{t^4-1}+1}{\frac{2}{t^4-1}\cdot\frac{2t^4}{t^4-1}\cdot t}\cdot\frac{-8t^3}{(t^4-1)^2}dt=-2\int\frac{1}{t^2}\left(\frac{2}{t^4-1}+1\right)dt=$	1 балл
4.	$=-2\int\left(\frac{1}{t^2}\cdot\frac{2}{t^4-1}+\frac{1}{t^2}\right)dt=\frac{2}{t}-2\int\frac{1}{t^2}\left(\frac{1}{t^2-1}-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=$	1 балл
5.	$=\frac{2}{t}-2\int\frac{1}{t^2}\cdot\frac{1}{t^2-1}dt+2\int\frac{1}{t^2}\cdot\frac{1}{t^2+1}dt=$ $=\frac{2}{t}-2\int\left(\frac{1}{t^2-1}-\frac{1}{t^2}\right)dt+2\int\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=$	1 балл
6.	$=\ln\left(\frac{t+1}{t-1}\right)-2\operatorname{arctg}t-\frac{2}{t}+C=$ $=\ln\left(\frac{\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[4]{x-1}}{\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x-1}}\right)-2\operatorname{arctg}\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}}-2\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}+C$	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов

Примечание: *Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.*

12.6. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором $m(\angle A_1AD)=m(\angle A_1AB)=m(\angle DAB)=60°$, и $C_1A_1=\sqrt{7}$ см, $C_1B=\sqrt{13}$ см, $C_1D=\sqrt{19}$ см. Найдите расстояние от точки A до плоскости A_1BD.

Этапы решения со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Применение теоремы косинусов и получение системы $$\begin{cases} AB^2 + AD^2 + AB \cdot AD = 7 \\ AD^2 + A_1A^2 + AD \cdot A_1A = 13 \\ AB^2 + A_1A^2 + AB \cdot A_1A = 19 \end{cases}$$	1 балл
2.	Решение системы $$\begin{cases} AB^2 + AD^2 + AB \cdot AD = 7 \\ AD^2 + A_1A^2 + AD \cdot A_1A = 13 \\ AB^2 + A_1A^2 + AB \cdot A_1A = 19 \end{cases}$$ и получение $AD = 1$ см, $AB = 2$ см, $A_1A = 3$ см.	2 балла
3.	Получение $\mathcal{V}_{A_1ABD} = \frac{1}{3} A_{\Delta ABD} \cdot A_1O = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (см^3), где O есть проекция точки A_1 на плоскости ABD	2 балла
4.	Получение $\mathcal{V}_{A_1ABD} = \frac{1}{3} A_{\Delta A_1BD} \cdot AK = \frac{5\sqrt{3}}{12} \cdot AK$, где K есть проекция точки A на плоскость A_1BD	1 балл
5.	Получение $AK = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ см	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов

Примечание: *Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.*

12.7. Даны комплексные числа z_1, z_2, z_3 такие, что $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ и $z_1z_2z_3 \neq -1$. Покажите, что

$$w = \frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3}{1 + z_1z_2z_3}$$

есть действительное число.

Этапы решения со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	$|z_i| = 1 \Rightarrow z_i\overline{z_i} = 1, i = 1,2,3$	1 балл
2.	Получение $$\overline{w} = \overline{\left(\frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3}{1 + z_1z_2z_3}\right)} = \frac{\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3} + \overline{z_1}\,\overline{z_2} + \overline{z_1}\,\overline{z_3} + \overline{z_2}\,\overline{z_3}}{1 + \overline{z_i}\,\overline{z_2}\,\overline{z_3}}$$	2 балла
3.	$$= \frac{z_1z_2z_3(\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3} + \overline{z_1}\,\overline{z_2} + \overline{z_1}\,\overline{z_3} + \overline{z_2}\,\overline{z_3})}{z_1z_2z_3(1 + \overline{z_i}\,\overline{z_2}\,\overline{z_3})} =$$	2 балла
4.	$$= \frac{z_1\overline{z_1}z_2z_3 + z_1z_2\overline{z_2}z_3 + z_1z_2z_3\overline{z_3} + z_1\overline{z_1}z_2\overline{z_2}z_3 + z_1\overline{z_1}z_2z_3\overline{z_3} + z_1z_2\overline{z_2}z_3\overline{z_3}}{z_1\overline{z_i}z_2\overline{z_2}z_3\overline{z_3} + z_1z_2z_3} = w$$	1 балл

5.	$w = \overline{w} \Rightarrow w \in \mathbb{R}$	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов

Примечание: *Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.*

12.8. Найдите все непрерывные функции $f\colon \left[\frac{1}{e^2}; e^2\right] \to \mathbb{R}$, при которых

$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} f(e^{-x})dx - \int_{-2}^{2} f^2(e^x)dx = \frac{1}{2}.$$

Этапы решения со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	$\int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} f(e^{-x})dx = \left\lvert \begin{matrix} x=-t \\ dx=-dt \\ x=-2 \Rightarrow t=2 \\ x=2 \Rightarrow t=-2 \end{matrix} \right\rvert = \int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{1+e^{-t}}} f(e^t)dt$	1 балл
2.	$\int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} f(e^{-x})dx = \frac{1}{2} + \int_{-2}^{2} f^2(e^x)dx \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \int_{-2}^{2} \left(f^2(e^x) - \frac{1}{\sqrt{1+e^{-x}}} f(e^x) \right) dx + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow$	1 балл
3.	$\Leftrightarrow \int_{-2}^{2} \left(f(e^x) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+e^{-x}}} \right)^2 dx + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \int_{-2}^{2} \frac{dx}{1+e^{-x}} = 0 \qquad (1)$	2 балла
4.	$\int_{-2}^{2} \frac{dx}{1+e^{-x}} = \int_{-2}^{2} \frac{d(e^x+1)}{e^x+1} = \ln(e^x+1)\vert_{-2}^{2} = \ln(e^2+1) = \ln(e^{-2}+1) = 2$	1 балл
5.	Упоминание, что для любой непрерывной неотрицательной функции $h\colon [a; b] \to \mathbb{R}$, $\int_a^b h(x)dx = 0 \Leftrightarrow h(x) = 0, \forall x \in [a; b]$ и получение, что $(1) \Leftrightarrow \int_{-2}^{2} \left(f(e^x) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+e^{-x}}} \right)^2 dx = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f(e^x) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+e^{-x}}} = 0, \forall x \in [-2; 2]$	1 балл
6.	Получение $f(t) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{t}{1+t}}, \forall t \in \left[\frac{1}{e^2}; e^2\right]$	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов

Примечание 1. *Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.*

Примечание 2. *Получение функции f без упоминания эквивалентности отношений или без проверки полученной функции оценивается максимум в 6 баллов.*