Olimpiada Republicană la Matematică
Ziua a doua, 1 martie 2020, Clasa a XII–a

Barem de evaluare

12.5. Fie funcția continuă $f:(1;\ +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+1)^5}}$. Determinați primitivele $F:(1;\ +\infty) \to \mathbb{R}$ ale funcției f.		
Etape ale rezolvării cu barem de evaluare		
Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	$\int \frac{xdx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+1)^5}} = \int \frac{xdx}{(x-1)(x+1)\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}}} =$	1 punct
2.	$= \left\lvert \begin{array}{c} t = \sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}} \\ x = \frac{2}{t^4-1} + 1 \\ dx = -\frac{8t^3}{(t^4-1)^2}dt \end{array} \right\rvert =$	2 puncte
3.	$= \int \frac{\frac{2}{t^4-1}+1}{\frac{2}{t^4-1}\cdot\frac{2t^4}{t^4-1}\cdot t} \cdot \frac{-8t^3}{(t^4-1)^2}dt = -2\int \frac{1}{t^2}\left(\frac{2}{t^4-1}+1\right)dt =$	1 punct
4.	$= -2\int\left(\frac{1}{t^2}\cdot\frac{2}{t^4-1}+\frac{1}{t^2}\right)dt = \frac{2}{t} - 2\int\frac{1}{t^2}\left(\frac{1}{t^2-1}-\frac{1}{t^2+1}\right)dt =$	1 punct
5.	$= \frac{2}{t} - 2\int\frac{1}{t^2}\cdot\frac{1}{t^2-1}dt + 2\int\frac{1}{t^2}\cdot\frac{1}{t^2+1}dt =$ $= \frac{2}{t} - 2\int\left(\frac{1}{t^2-1}-\frac{1}{t^2}\right)dt + 2\int\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^2+1}\right)dt =$	1 punct
6.	$= \ln\left(\frac{t+1}{t-1}\right) - 2\mathrm{arctg}\, t - \frac{2}{t} + C =$ $= \ln\left(\frac{\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[4]{x-1}}{\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x-1}}\right) - 2\mathrm{arctg}\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}} - 2\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}} + C$	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

Remarcă: *Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.*

12.6. Fie paralelipipedul $ABCDA_1B_1C_1D_1$, în care $m(\angle A_1AD) = m(\angle A_1AB) = m(\angle DAB) = 60°$, iar $C_1A_1 = \sqrt{7}$ cm, $C_1B = \sqrt{13}$ cm, $C_1D = \sqrt{19}$ cm. Determinați distanța de la punctul A la planul A_1BD.

Etape ale rezolvării cu barem de evaluare		
Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Aplicarea teoremei cosinusurilor și obținerea sistemului $\begin{cases} AB^2+AD^2+AB\cdot AD=7 \\ AD^2+A_1A^2+AD\cdot A_1A=13 \\ AB^2+A_1A^2+AB\cdot A_1A=19 \end{cases}$	1 punct
2.	Rezolvarea sistemului $\begin{cases} AB^2+AD^2+AB\cdot AD=7 \\ AD^2+A_1A^2+AD\cdot A_1A=13 \\ AB^2+A_1A^2+AB\cdot A_1A=19 \end{cases}$ și obținerea $AD=1$ cm, $AB=2$ cm, $A_1A=3$ cm.	2 puncte
3.	Obținerea $\mathcal{V}_{A_1ABD}=\frac{1}{3}A_{\Delta ABD}\cdot A_1O=\frac{\sqrt{2}}{2}$ (cm^3), unde O este proiecția punctului A_1 pe planul ABD	2 puncte
4.	Obținerea $\mathcal{V}_{A_1ABD}=\frac{1}{3}A_{\Delta A_1BD}\cdot AK=\frac{5\sqrt{3}}{12}\cdot AK$, unde K este proiecția punctului A pe planul A_1BD	1 punct
5.	Obținerea $AK=\frac{2\sqrt{6}}{5}$ cm	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

Remarcă: *Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.*

12.7. Fie numerele complexe z_1, z_2, z_3, astfel încât $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ și $z_1z_2z_3\neq -1$. Arătați că

$$w=\frac{z_1+z_2+z_3+z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3}{1+z_1z_2z_3}$$

este un număr real.

Etape ale rezolvării cu barem de evaluare		
Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	$\lvert z_i\rvert=1 \Rightarrow z_i\overline{z_i}=1, i=1,2,3$	1 punct
2.	Obținerea $\overline{w}=\overline{\left(\frac{z_1+z_2+z_3+z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3}{1+z_1z_2z_3}\right)}=\frac{\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}+\overline{z_1}\,\overline{z_2}+\overline{z_1}\,\overline{z_3}+\overline{z_2}\,\overline{z_3}}{1+\overline{z_1}\,\overline{z_2}\,\overline{z_3}}=$	2 puncte
3.	$=\frac{z_1z_2z_3(\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}+\overline{z_1}\,\overline{z_2}+\overline{z_1}\,\overline{z_3}+\overline{z_2}\,\overline{z_3})}{z_1z_2z_3(1+\overline{z_1}\,\overline{z_2}\,\overline{z_3})}=$	2 puncte
4.	$=\frac{z_1\overline{z_1}z_2z_3+z_1z_2\overline{z_2}z_3+z_1z_2z_3\overline{z_3}+z_1\overline{z_1}z_2\overline{z_2}z_3+z_1\overline{z_1}z_2z_3\overline{z_3}+z_1z_2\overline{z_2}z_3\overline{z_3}}{z_1\overline{z_1}z_2\overline{z_2}z_3\overline{z_3}+z_1z_2z_3}=w$	1 punct
5.	$w=\overline{w}\Rightarrow w\in\mathbb{R}$	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

Remarcă: *Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.*

12.8. Determinați toate funcțiile continue $f\colon \left[\frac{1}{e^2}; e^2\right] \to \mathbb{R}$, pentru care

$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} f(e^{-x})dx - \int_{-2}^{2} f^2(e^x)dx = \frac{1}{2}.$$

Etape ale rezolvării cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	$\int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} f(e^{-x})dx = \left\vert \begin{matrix} x=-t \\ dx=-dt \\ x=-2 \Rightarrow t=2 \\ x=2 \Rightarrow t=-2 \end{matrix} \right\vert = \int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{1+e^{-t}}} f(e^t)dt$	1 punct
2.	$\int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} f(e^{-x})dx - \int_{-2}^{2} f^2(e^x)dx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \int_{-2}^{2} \left(f^2(e^x) - \frac{1}{\sqrt{1+e^{-x}}} f(e^x) \right) dx + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow$	1 punct
3.	$\Leftrightarrow \int_{-2}^{2} \left(f(e^x) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+e^{-x}}} \right)^2 dx + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \int_{-2}^{2} \frac{dx}{1+e^{-x}} = 0 \qquad (1)$	2 puncte
4.	$\int_{-2}^{2} \frac{dx}{1+e^{-x}} = \int_{-2}^{2} \frac{d(e^x+1)}{e^x+1} = \ln(e^x+1)\Big\vert_{-2}^{2} = \ln(e^2+1) = \ln(e^{-2}+1) = 2$	1 punct
5.	Menționarea că pentru orice funcție continuă nenegativă $h\colon [a;b] \to \mathbb{R}$, $\int_a^b h(x)dx = 0 \Leftrightarrow h(x) = 0, \forall x \in [a;b]$ și obținerea că $(1) \Leftrightarrow \int_{-2}^{2} \left(f(e^x) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+e^{-x}}} \right)^2 dx = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f(e^x) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+e^{-x}}} = 0, \forall x \in [-2;2]$	1 punct
6.	Obținerea $f(t) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{t}{1+t}}, \forall t \in \left[\frac{1}{e^2}; e^2\right]$	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

Remarcă 1. *Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.*

Remarcă 2. *Obținerea funcției f fără menționarea echivalenței relațiilor sau fără verificarea funcției obținute se apreciază cu cel mult 6 puncte.*