

Olimpiada Republicană la Matematică
Prima zi, 29 februarie 2020, Clasa a XII-a

12.1. a) Calculați:

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \arcsin \frac{1}{x} \right) dx$$

b) Comparați numerele: $\frac{\pi}{6}$ și $\ln \frac{2+\sqrt{3}}{2}$.

12.2. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} -a & \frac{1}{1-a} \\ a^3 - 1 & 1 + a \end{pmatrix}$, unde $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Determinați $A^{2021} - A^{2020}$.

12.3. Triunghiul ascuțitunghic isoscel ABC , $m(\angle B) = m(\angle C) = \alpha$, este baza prisme $ABCA_1B_1C_1$. Muchia laterală A_1A este perpendiculară muchiei AC , iar $m(\angle A_1AB) = \beta < 90^\circ$. Determinați aria laterală a prisme, dacă $A_1A = BC = a$.

12.4. Fie $I_n = \int_1^n \frac{[x]}{x^2+1} dx$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Calculați: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_n}{\ln n}$.

Timp de lucru: 240 minute.

Rezolvarea corectă a fiecărei probleme se apreciază cu 7 puncte. MULT SUCCES !

Olimpiada Republicană la Matematică
Prima zi, 29 februarie 2020, Clasa a XII-a

12.1. a) Calculați:

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \arcsin \frac{1}{x} \right) dx$$

b) Comparați numerele: $\frac{\pi}{6}$ și $\ln \frac{2+\sqrt{3}}{2}$.

12.2. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} -a & \frac{1}{1-a} \\ a^3 - 1 & 1 + a \end{pmatrix}$, unde $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Determinați $A^{2021} - A^{2020}$.

12.3. Triunghiul ascuțitunghic isoscel ABC , $m(\angle B) = m(\angle C) = \alpha$, este baza prisme $ABCA_1B_1C_1$. Muchia laterală A_1A este perpendiculară muchiei AC , iar $m(\angle A_1AB) = \beta < 90^\circ$. Determinați aria laterală a prisme, dacă $A_1A = BC = a$.

12.4. Fie $I_n = \int_1^n \frac{[x]}{x^2+1} dx$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Calculați: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_n}{\ln n}$.

Timp de lucru: 240 minute.

Rezolvarea corectă a fiecărei probleme se apreciază cu 7 puncte. MULT SUCCES !