Olimpiada Republicană la Matematică
Prima zi, 29 februarie 2020, Clasa a XII–a

Soluții

12.1. a) Calculați:

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \arcsin\frac{1}{x}\right) dx$$

b) Comparați numerele: $\frac{\pi}{6}$ și $\ln\frac{2+\sqrt{3}}{2}$.

Soluţie:
a)

$$I = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \arcsin\frac{1}{x}\right) dx = \ln x|_1^2 - x\arcsin\frac{1}{x}\Big|_1^2 + \int_1^2 x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx =$$

$$\ln 2 + \frac{\pi}{6} - \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \ln 2 + \frac{\pi}{6} - \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)\Big|_1^2 = \frac{\pi}{6} - \ln\frac{2+\sqrt{3}}{2}.$$

Pentru $x \in [1; 2]$, $\arcsin\frac{1}{x} > \frac{1}{x}$, ceea ce implică $I = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \arcsin\frac{1}{x}\right) dx < 0$. Utilizând valoarea integralei I, obținută în punctul a) obținem

$$\frac{\pi}{6} < \ln\frac{2+\sqrt{3}}{2}.$$

12.2. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} -a & \frac{1}{1-a} \\ a^3-1 & 1+a \end{pmatrix}$, unde $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Determinați $A^{2021} - A^{2020}$.

Soluţie:
Observăm că

$$A^2 = \begin{pmatrix} -a-1 & \frac{1}{1-a} \\ a^3-1 & a \end{pmatrix}, \qquad A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2.$$

Atunci $A^{2020} = (A^3)^{673} \cdot A = -A$, $A^{2021} = (A^3)^{673} \cdot A^2 = -A^2$.

Obținem $A^{2021} - A^{2020} = -A^2 + A = I_2$.

12.3. Triunghiul ascuțitunghic isoscel ABC, $m(\angle B) = m(\angle C) = \alpha$, este baza prismei $ABCA_1B_1C_1$. Muchia laterală A_1A este perpendiculară muchiei AC, iar $m(\angle A_1AB) = \beta < 90°$. Determinați aria laterală a prismei, dacă $A_1A = BC = a$.

Soluţie:
Ținând cont de faptul că A_1ACC_1 este dreptunghi, $AC = AB = \frac{a}{2\cos\alpha}$, obținem $\mathcal{A}_{A_1ACC_1} = \frac{a^2}{2\cos\alpha}$.

$\mathcal{A}_{A_1ABB_1} = \dfrac{a^2}{2\cos\alpha}\sin\beta$.

Considerăm dreapta $d \parallel AB, C \in d$. Fie $K \in (ABC)$, $(C_1K) \perp (ABC)$. Fie $T \in d, (KT) \perp d$.

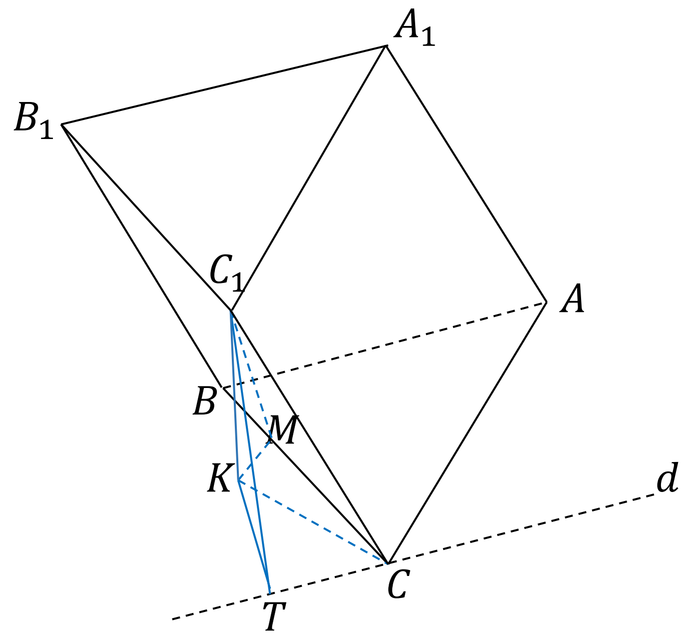
Atunci $m(\angle C_1CT) = \beta$ și $CT = a\cos\beta$.

$(KC) \perp (AC) \Rightarrow m(\angle KCT) = 2\alpha - 90°$

și $m(\angle KCB) = 90° - \alpha$.

Atunci $KC = \frac{CT}{\sin(2\alpha)} = \frac{a\cos\beta}{\sin(2\alpha)}$ și

$$C_1K^2 = C_1C^2 - KC^2 = a^2 - \frac{a^2\cos^2\beta}{\sin^2(2\alpha)}.$$



Fie $M \in BC, (KM) \perp (BC)$. Atunci
$KM = KC\sin(90° - \alpha) = \frac{a\cos\beta}{\sin(2\alpha)}\cos\alpha$.

$$\begin{aligned} C_1M^2 &= C_1K^2 + KM^2 \\ &= a^2\left(1 - \frac{\cos^2\beta}{\sin^2(2\alpha)} + \frac{\cos^2\beta}{\sin^2(2\alpha)}\cos^2\alpha\right) = \end{aligned}$$

$$= a^2\left(1 - \frac{\cos^2\beta}{4\cos^2\alpha}\right) = a^2\frac{4\cos^2\alpha - \cos^2\beta}{4\cos^2\alpha}.$$

Atunci $\mathcal{A}_{BCC_1B_1} = BC \cdot C_1M = \frac{a^2\sqrt{4\cos^2\alpha - \cos^2\beta}}{2\cos\alpha}$.

Obținem

$$\mathcal{A}_{lat.} = \frac{a^2}{2\cos\alpha}\left(1 + \sin\beta + \sqrt{4\cos^2\alpha - \cos^2\beta}\right).$$

12.4. Fie $I_n = \int_1^n \frac{[x]}{x^2+1}dx, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Calculați: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{I_n}{\ln n}$.

Soluție:

Conform lemei Stolz-Cesàro obținem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{I_n}{\ln n} = \lim_{n\to\infty}\frac{I_{n+1} - I_n}{\ln(n+1) - \ln n}.$$

$$I_{n+1} - I_n = \int_n^{n+1}\frac{[x]}{x^2+1}dx = n\int_n^{n+1}\frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= n(\operatorname{arctg}(n+1) - \operatorname{arctg} n) =$$

$$= n \cdot \operatorname{arctg}\frac{(n+1) - n}{1 + (n+1)n} = n \cdot \operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+n+1}.$$

Atunci

$$\lim_{n\to\infty}\frac{I_{n+1} - I_n}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n \cdot \operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+n+1}}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n \cdot \frac{1}{n^2+n+1}}{\frac{1}{n}} = 1.$$