Республиканская Олимпиада по Математике
Первый день, 29 февраля 2020 года, XII-й класс
Схема оценивания

12.1. a) Вычислите:

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \arcsin\frac{1}{x}\right) dx$$

b) Сравните числа: $\frac{\pi}{6}$ и $\ln\frac{2+\sqrt{3}}{2}$.

Этапы решения со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	$I = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \arcsin\frac{1}{x}\right) dx = \ln x\|_1^2 - x\arcsin\frac{1}{x}\Big\|_1^2 + \int_1^2 x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx =$	2 балла
2.	$I = \ln 2 + \frac{\pi}{6} - \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx$	1 балл
3.	$I = \ln 2 + \frac{\pi}{6} - \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)\Big\|_1^2 = \frac{\pi}{6} - \ln\frac{2+\sqrt{3}}{2}.$	1 балл
4.	При $x \in [1; 2]$, $\arcsin\frac{1}{x} > \frac{1}{x}$. Следовательно, $I = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \arcsin\frac{1}{x}\right) dx < 0.$	2 балла
5.	$\frac{\pi}{6} < \ln\frac{2+\sqrt{3}}{2}$	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов

Примечание: *Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.*

12.2. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} -a & \frac{1}{1-a} \\ a^3-1 & 1+a \end{pmatrix}$, где $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Найдите $A^{2021} - A^{2020}$.

Этапы решения со схемой распределения баллов

Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	$A^2 = \begin{pmatrix} -a-1 & \frac{1}{1-a} \\ a^3-1 & a \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$	2 балла
2.	$A^{2020} = (A^3)^{673} \cdot A = -A$	2 балла
3.	$A^{2021} = (A^3)^{673} \cdot A^2 = -A^2$	2 балла
4.	Получение $A^{2021} - A^{2020} = -A^2 + A = I_2$.	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов

Примечание: *Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.*

12.3. Остроугольный равнобедренный треугольник ABC, $m(\angle B)= m(\angle C) = \alpha$, служит основанием призмы $ABCA_1B_1C_1$. Боковое ребро A_1A перпендикулярно ребру AC, и $m(\angle A_1AB) = \beta < 90°$. Найдите площадь боковой поверхности призмы, если известно, что $A_1A = BC = a$.		
Этапы решения со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	A_1ACC_1- прямоугольник, $AC = AB = \frac{a}{2\cos\alpha} \Rightarrow \mathcal{A}_{A_1ACC_1} = \frac{a^2}{2\cos\alpha}$	1 балл
2.	$\mathcal{A}_{A_1ABB_1} = \frac{a^2}{2\cos\alpha}\sin\beta$	1 балл
3.	Нахождение расстояния от вершины C_1 до плоскости ABC	1 балл
4.	Нахождение расстояния от точки K до прямой BC, где K есть проекция точки C_1 на плоскости ABC	1 балл
5.	Нахождение расстояния от точки C_1 до прямой BC	1 балл
6.	Вычисление площади параллелограмма BCC_1B_1	1 балл
7.	Получение $\mathcal{A}_{\text{бок.}} = \frac{a^2}{2\cos\alpha}\left(1+\sin\beta+\sqrt{4\cos^2\alpha-\cos^2\beta}\right)$	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов

Примечание: *Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.*

12.4. Пусть $I_n = \int_1^n \frac{[x]}{x^2+1}dx\,, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Вычислите: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{I_n}{\ln n}$.		
Этапы решения со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Используя теорему Штольца $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{I_n}{\ln n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{I_{n+1}-I_n}{\ln(n+1)-\ln n}$	2 балла
2.	$I_{n+1}-I_n = \int\limits_n^{n+1}\frac{[x]}{x^2+1}dx = n\int\limits_n^{n+1}\frac{dx}{x^2+1} =$	1 балл
3.	$= n(\operatorname{arctg}(n+1) - \operatorname{arctg} n) =$	1 балл
4.	$= n\cdot\operatorname{arctg}\frac{(n+1)-n}{1+(n+1)n} = n\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+n+1}$	1 балл
5.	Получение $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{I_{n+1}-I_n}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+n+1}}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\cdot\frac{1}{n^2+n+1}}{\frac{1}{n}} = 1$	2 балла
	Общее количество баллов	7 баллов

Примечание: *Любое другое правильное решение оценивается в 7 баллов.*